

MINISTERUL EDUCAȚIEI AL REPUBLICII MOLDOVA

Ion Achiri Andrei Braicov Olga Șpunteenco

Matematică

Manual pentru clasa a

9-a

Ediție revizuită și completată

EDITURA
PRUT

Manualul a fost aprobat prin ordinul Ministrului Educației al Republicii Moldova nr. 528 din 02 iunie 2016.

Lucrarea este elaborată conform curriculumului disciplinar și apare cu sprijinul financiar al Fondului Special pentru Manuale.

Acest manual este proprietatea Ministerului Educației al Republicii Moldova.

Școala/Liceul				
Manualul nr.				
Anul de folosire	Numele și prenumele elevului	Anul școlar	Aspectul manualului	
			la primire	la returnare
1				
2				
3				
4				
5				

- Dirigintele clasei va controla dacă numele elevului este scris corect.
- Elevii nu vor face nici un fel de însemnări în manual.
- Aspectul manualului (la primire și la returnare) se va aprecia: *nou, bun, satisfăcător, nesatisfăcător.*

Toate drepturile asupra acestei ediții aparțin Editurii *Prut Internațional*.

Reproducerea integrală sau parțială a textului sau a ilustrațiilor din această carte este permisă doar cu acordul scris al editurii.

Comisia de evaluare:

Aliona Lașcu, profesoară, grad didactic I, Liceul Teoretic „Mihai Eminescu”, Chișinău

Mariana Morari, profesoară, grad didactic I, Liceul Teoretic „Gaudeamus”, Chișinău

Carolina Parfene, profesoară, grad didactic I, Liceul Teoretic „Ginta Latină”, Chișinău

Redactor: *Tatiana Rusu*

Corector: *Fulga Poiată*

Coperta: *Sergiu Stanciu*

Paginare computerizată: *Valentina Stratu*

© Editura *Prut Internațional*, 2016

© I. Achiri, A. Braicov, O. Șpunteco, 2016

Editura *Prut Internațional*, str. Alba Iulia nr. 23, bl. 1 A, Chișinău, MD 2051

Tel.: (+373 22) 75 18 74; tel./fax: (+373 22) 74 93 18; e-mail: editura@prut.ro, www.edituraprut.md

Difuzare: Societatea de Distribuție a Cărții *PRO NOI*, str. Alba Iulia nr. 75, bl. Q, Chișinău, MD 2071

Tel.: (+373 22) 51 68 17, (+373 22) 58 93 08; www.pronoi.md; e-mail: info@pronoi.md

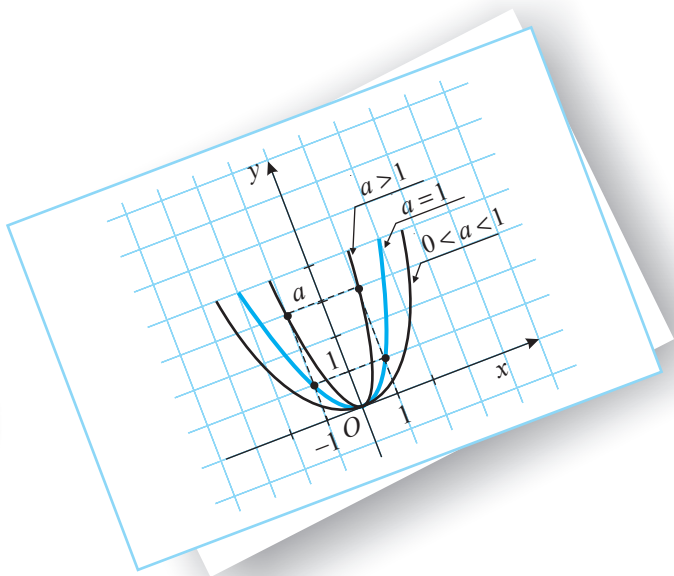
Imprinat la F.E.-P. *Tipografia Centrală*. Comanda nr. 8524 (2016)

CZU 51(075.3)

A 16

ISBN 978-9975-54-255-5

A L G E B R Ä



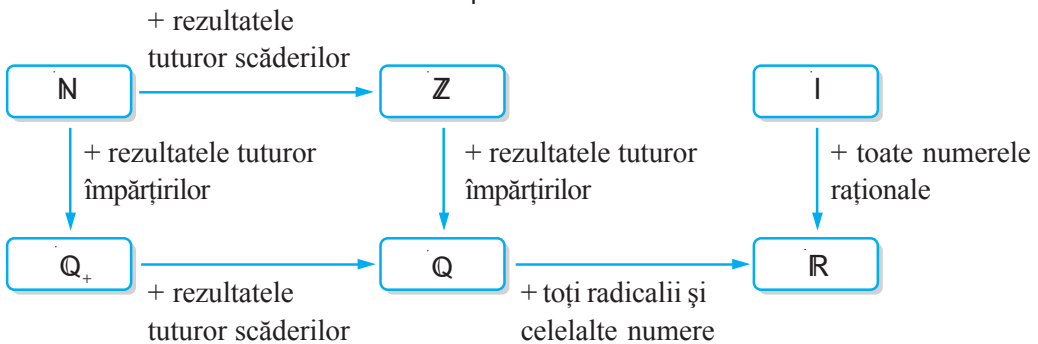
$$P(X) = Q(X) \cdot C(X) + R(X)$$

Recapitulare și completări

§ 1. Mulțimea numerelor reale

1.1. Noțiunea de număr real

• Examinați schema, apoi substituiți fiecare casetă cu un element sau cu o submulțime a mulțimii $A = \{-5; -21; -\sqrt{3}; 0; 2; 3\frac{1}{4}; \sqrt{7}; 5,8; 9\}$.



_____	$\in \mathbb{Z}$	_____	$\subset \mathbb{Z}$
_____	$\in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$	_____	$\subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
_____	$\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$	_____	$\subset \mathbb{Q}$
_____	$\in \mathbb{Q}_+$	_____	$\subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

Model: $\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
 $\{2; 9\} \subset \mathbb{N}$

Notatii:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 3, 4, \dots\}$ – mulțimea numerelor naturale.

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ – mulțimea numerelor naturale nenule.

$\mathbb{Z} = \{\dots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ – mulțimea numerelor întregi.

$\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*\}$ – mulțimea numerelor raționale.

$\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{x \mid x \text{ – număr zecimal neperiodic cu un număr infinit de zecimale}\}$ – mulțimea numerelor iraționale.

$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ – număr rațional sau irațional}\}$ – mulțimea numerelor reale.

Sînt adevărate relațiile: $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$; $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

\mathbb{R}^* – mulțimea numerelor reale nenule;

\mathbb{R}_+ – mulțimea numerelor reale pozitive;

\mathbb{R}_- – mulțimea numerelor reale negative.

- Scrieți sub formă de număr zecimal fracția $\frac{33}{18}$.

Rezolvare:

Efectuăm împărțirea și obținem: $\frac{33}{18} = 1,8(3)$.

$1,8(3)$ este un număr zecimal periodic mixt.

Definiții

- ◆ Numerele zecimale periodice a căror perioadă urmează imediat după virgulă se numesc **numere zecimale periodice simple**.
- ◆ Numerele zecimale periodice a căror perioadă nu urmează imediat după virgulă se numesc **numere zecimale periodice mixte**.

APLICĂM

- Scrieți sub formă de fracție numărul zecimal: a) $0,(26)$; b) $25,2(43)$.

Rezolvare:

a) Fie $x = 0,(26)$.

Atunci $100x = 26,(26) = 26 + x \Leftrightarrow 100x - x = 26 \Leftrightarrow x = \frac{26}{99}$.

Răspuns: $0,(26) = \frac{26}{99}$.

În general, $0,(\overline{a_1 a_2 \dots a_n}) = \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_n}}{\underbrace{99 \dots 9}_n}$, unde a_1, a_2, \dots, a_n sînt cifre.

b) **Metoda I.** Fie $x = 25,2(43)$.

Atunci $10x = 252,(43) = 252 + 0,(43) = 252 + \frac{43}{99} \Leftrightarrow x = \frac{24\,991}{990} = 25\frac{241}{990}$.

Metoda II. $25,2(43) = 25 + \frac{243 - 2}{990} = 25\frac{241}{990}$.

Răspuns: $25,2(43) = 25\frac{241}{990}$.

În general, $0,\overline{a_1 a_2 \dots a_n}(\overline{b_1 b_2 \dots b_m}) = \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_m} - \overline{a_1 a_2 \dots a_n}}{\underbrace{99 \dots 9}_m \underbrace{00 \dots 0}_n}$.

Un număr real poate fi scris sub forma:

- unui număr zecimal cu un număr finit de zecimale;
- unui număr zecimal neperiodic cu un număr infinit de zecimale;
- unui număr zecimal periodic cu perioada diferită de 9.

1.2. Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor

- Reprezentați numărul $\sqrt{2}$ pe axa numerelor:
 - folosind aproximațiile lui zecimale;
 - geometric (cu ajutorul riglei și compasului).

Rezolvare:

Cum $\sqrt{2} \approx 1,414$, rezultă că $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$. Obținem următoarea reprezentare aproximativă a numărului $\sqrt{2}$ pe axa numerelor (fig. 1):

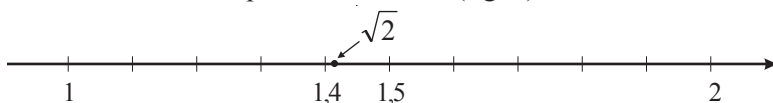


Fig. 1

- Construim pe axa numerelor pătratul $OABC$ cu latura $AB = 1$ (fig. 2).

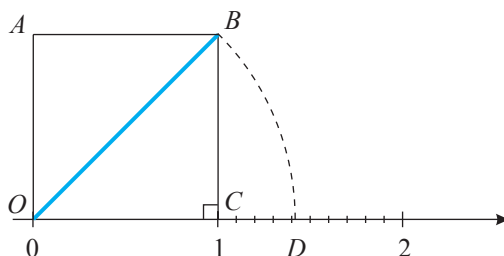


Fig. 2

Aplicînd teorema lui Pitagora triunghiului OCB ($m(\angle C) = 90^\circ$), obținem $OB = \sqrt{2}$. Construim, cu ajutorul compasului, pe axa numerelor segmentul OD , astfel încît $OD = OB = \sqrt{2}$. Atunci punctul D are coordonata $\sqrt{2}$.

De regulă, numerele iraționale se reprezintă pe axa numerelor folosind aproximațiile lor zecimale.

Fiecărui număr real a îi corespunde un punct A al axei numerelor și, reciproc, fiecărui punct A al axei numerelor îi corespunde un număr real a . De aceea vorbim despre punctele axei numerelor ca despre numere reale, și invers.

Numărul a se numește **coordonata** punctului A ; se notează $A(a)$.

Folosind reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor, pot fi rezolvate diverse probleme. Una dintre ele este compararea numerelor reale. (O altă modalitate de comparare a numerelor reale va fi examinată în secvența 2.2.)

De exemplu, dacă numerele reale a și b sînt respectiv coordonatele punctelor A și B ale axei numerelor și \overrightarrow{AB} are sensul axei, atunci $a < b$ (fig. 3).

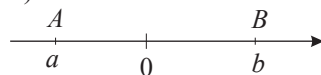


Fig. 3

Dintre două numere reale reprezentate pe axa numerelor, mai mare este numărul situat în dreapta celuilalt.

APLICĂM

• Comparați numerele:

a) $\sqrt{2}$ și $\sqrt{3}$; b) $\sqrt{2}$ și $-\sqrt{2}$.

Rezolvare:

a) Deoarece $\sqrt{2} \approx 1,4$ și $\sqrt{3} \approx 1,7$, iar $1,4 < 1,7$, obținem $\sqrt{2} < \sqrt{3}$.

Răspuns: $\sqrt{2} < \sqrt{3}$.

b) Cum $\sqrt{2} > 0$, iar $-\sqrt{2} < 0$, obținem $\sqrt{2} > -\sqrt{2}$.

Răspuns: $-\sqrt{2} < \sqrt{2}$.

Observație. Numerele $\sqrt{2}$ și $-\sqrt{2}$ sînt numere reale opuse, adică punctele $D(\sqrt{2})$ și $D'(-\sqrt{2})$ ale axei numerelor sînt simetrice față de originea ei, și invers, coordonatele punctelor $D(\sqrt{2})$ și $D'(-\sqrt{2})$, simetrice față de originea O , sînt numere reale opuse (fig. 4).

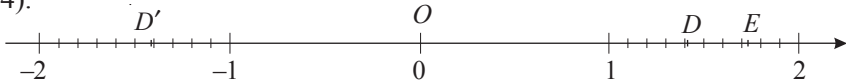


Fig. 4

Numere reale opuse sînt numerele reale situate pe axa numerelor de părți diferite față de origine și la distanțe egale de ea.

Numere reale opuse sînt numerele reale de forma a și $-a$.

1.3. Modulul numărului real

• Explicitați modulul:

a) $|3 - \sqrt{2}|$; b) $|1 - \sqrt{3}|$; c) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 3\}$; d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > \frac{1}{3}\right\}$.

Rezolvare:

a) $|3 - \sqrt{2}| = 3 - \sqrt{2}$, deoarece $3 > \sqrt{2}$;

b) $|1 - \sqrt{3}| = -(1 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$, deoarece $1 < \sqrt{3}$;

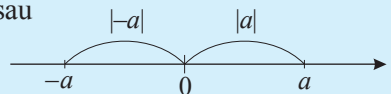
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 3\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [-3, 3]\}$;

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > \frac{1}{3}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)\right\}$.

Modulul sau **valoarea absolută** a unui număr real a este:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{dacă } a \geq 0 \\ -a, & \text{dacă } a < 0 \end{cases} \text{ sau } |a| = \max\{-a, a\}, \text{ sau}$$

distanța de la a la 0 pe axă.



Proprietăți ale modulului unui număr real

1° $|a| \geq 0$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, și $|a| = 0$ dacă și numai dacă $a = 0$.

2° $|a| \geq a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

3° $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

4° $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$.

5° $|a|^2 = |a^2| = |-a|^2 = a^2$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

APLICĂM

• Explicitați modulul utilizând proprietățile lui și aduceți la forma cea mai simplă:

a) $|3 - \sqrt{2}| \cdot |3 + \sqrt{2}|$;

b) $|1 - \sqrt{7}| \cdot (1 + \sqrt{7})$;

c) $|x + y| : (x + y)^2$.

Rezolvare:

a) $|3 - \sqrt{2}| \cdot |3 + \sqrt{2}| = |(3 - \sqrt{2}) \cdot (3 + \sqrt{2})| = |9 - 2| = 7$;

b) $|1 - \sqrt{7}| \cdot (1 + \sqrt{7}) = -(1 - \sqrt{7}) \cdot (1 + \sqrt{7}) = -(1 - 7) = 6$;

c) $|x + y| : (x + y)^2 = |x + y| \cdot \frac{1}{|x + y|^2} = \frac{1}{|x + y|}$.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Fie mulțimile:

1) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$;

2) $\mathbb{Q}_+ \setminus \mathbb{N}$;

3) $\mathbb{Q}_- \setminus \mathbb{Z}$;

4) $\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$;

5) $\mathbb{R}^* \setminus \mathbb{Q}$;

6) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_+$;

7) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{I}$.

Aflați elementele mulțimii $\{-1,4; \sqrt{5}; 7,(2); -21\frac{1}{4}; 0,18; 2010; \sqrt{21}\}$ care aparțin fiecăreia din mulțimile 1)–7).

2. Fie numerele $12; \sqrt{16}; 3,(7); -38\frac{1}{2}; 2011; -\sqrt{13}; 0; 6\sqrt{5}; \pi$.

Determinați care dintre aceste numere sînt raționale și care – iraționale.

3. 1) Scrieți ca număr zecimal fracția:

a) $\frac{7}{8}$;

b) $\frac{51}{15}$;

c) $\frac{131}{27}$;

d) $\frac{210}{198}$.

2) Aflați perioada fiecărui număr zecimal obținut.

4. Fie numerele:

a) $0,(3)$;

b) $2,1(6)$;

c) $5,(738)$;

d) $17,0(18)$;

e) $83,(685)$;

f) $70,13(18)$.

Determinați care dintre numerele zecimale periodice date sînt numere zecimale periodice simple și care – numere zecimale periodice mixte.

5. Reprezentați pe axa numerelor punctele:

$$A(-7), B\left(\frac{1}{2}\right), C(-1,25), D\left(3\frac{1}{4}\right), E(7).$$

6. Completați fiecare casetă cu un număr din mulțimea $\left\{\frac{1}{4}; 0,75; 0,(3); 5,5\right\}$, astfel încît propoziția obținută să fie adevărată:

$$\frac{3}{4} = \square; \quad \frac{1}{3} = \square; \quad 0,25 = \square; \quad 5\frac{1}{2} = \square.$$

7. Bunicul le spune nepoților: „Am pentru voi 130 de nuci. Împărțiți-le în două părți, astfel încît partea mai mică, fiind mărită de 4 ori, să fie egală cu partea mai mare micșorată de 3 ori.” Cum să procedeze nepoții?

Formăm capacitățile și aplicăm

8. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația și determinați ce tip de numere, raționale sau iraționale, sînt soluțiile ei:

a) $3\sqrt{2}x + 7 = 0$;

b) $16x - 3(x + 1) = 5x$;

c) $2,5(x - 4) - 6x = 3 - x$;

d) $x^2 - 3x - 10 = 0$;

e) $2x^2 + 7x - 8 = 0$;

f) $-x^2 + 10x + 2 = 0$.

9. Scrieți sub formă de fracție numărul zecimal:

a) $0,(18)$;

b) $3,(2)$;

c) $6,1(8)$;

d) $5,12(18)$;

e) $25,1(378)$.

10. Utilizînd axa numerelor, completați cu unul dintre semnele „<”, „>”, „=”:

a) $1 + \sqrt{7} \square 2\sqrt{3}$;

b) $-\sqrt{36} \square -6,123\dots$;

c) $3,78 \square \sqrt{11}$;

d) $-\frac{1}{3} \square -0,(33)$.

11. Explicitați modulul:

a) $|1 - \sqrt{7}|$;

b) $|-\sqrt{3} - \sqrt{2}|$;

c) $|8 - \sqrt{49}|$;

d) $|(3 - \sqrt{2})^2|$.

12. Explicitați modulul:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 7\}$;

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 0\}$;

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 0\}$;

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq \sqrt{5}\}$.

13. Reprezentați pe axa numerelor mulțimile obținute la exercițiul 12 în urma explicitării modulului.

14. Se dau două vase, de capacitatea 5 l și 7 l. Cum putem obține 4 l de apă folosind doar aceste două vase?

15. Stafidele obținute la uscarea strugurilor reprezintă 32% din cantitatea inițială a acestora. Din ce cantitate de struguri s-au obținut 8 kg de stafide?

Dezvoltăm capacitățile și creăm

16. Cercetați dacă este rațional numărul:

- a) $\sqrt{8}$; b) $7,2(15)$; c) $1-\sqrt{5}$; d) $\sqrt{225}$; e) $\sqrt{13}$.

17. Construiți pe axa numerelor, cu ajutorul riglei și compasului, punctul a cărui coordonată este numărul irațional:

- a) $\sqrt{13}$; b) $\sqrt{17}$; c) $-\sqrt{17}$; d) $-\sqrt{11}$.

18. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

- a) $|3x-7|=8$; b) $|2x^2+17x+658|=-2\sqrt{19}$;
c) $|x|\cdot|x-3|=4$; d) $|2x(x-0,5)|=3$.

19. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

- a) $|3x-1|=|1-x|$; b) $|2+x|=|5x-3|$;
c) $2|x|=|x-3|+2$; d) $|2x-1|=|x+5|-2$.

§2. Operații cu numere reale

2.1. Proprietăți ale operațiilor cu numere reale

• Calculați $2\sqrt{11} + \sqrt{7}$:

- 1) cu aproximație de 0,2;
- 2) cu aproximație de 0,02;
- 3) cu aproximație de 0,002.

Rezolvare:

Avem: $\sqrt{11} = 3,316\dots$, $\sqrt{7} = 2,645\dots$ Atunci $2\sqrt{11} = 6,633\dots$

Folosind aproximările zecimale, prin lipsă și prin adaos, ale numărului irațional, obținem:

1) $6,6 < 2\sqrt{11} < 6,7$ și $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$.

Atunci $6,6 + 2,6 < 2\sqrt{11} + \sqrt{7} < 6,7 + 2,7$.

Deci, $9,2 < 2\sqrt{11} + \sqrt{7} < 9,4$;

2) $6,63 < 2\sqrt{11} < 6,64$ și $2,64 < \sqrt{7} < 2,65$.

Deci, $9,27 < 2\sqrt{11} + \sqrt{7} < 9,29$;

3) $6,633 < 2\sqrt{11} < 6,634$ și $2,645 < \sqrt{7} < 2,646$.

Deci, $9,278 < 2\sqrt{11} + \sqrt{7} < 9,280$.

Observație. În funcție de aproximația necesară și folosind procedeul anterior, se poate obține numărul $2\sqrt{11} + \sqrt{7}$ cu una dintre aproximațiile 0,2; 0,02; 0,002 ș.a.m.d.

De exemplu, $2\sqrt{11} + \sqrt{7} \approx 9,27$ (prin lipsă) și $2\sqrt{11} + \sqrt{7} \approx 9,29$ (prin adaos) cu aproximație de 0,02.

Proprietăți ale adunării și înmulțirii numerelor reale1° **Asociativitatea:**

$$a + (b + c) = (a + b) + c \text{ pentru orice } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \text{ pentru orice } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

2° **Comutativitatea:**

$$a + b = b + a \text{ pentru orice } a, b \in \mathbb{R}.$$

$$a \cdot b = b \cdot a \text{ pentru orice } a, b \in \mathbb{R}.$$

3° **0 este element neutru pentru adunare:**

$$a + 0 = 0 + a = a \text{ pentru orice } a \in \mathbb{R}.$$

1 **este element neutru pentru înmulțire:**

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a \text{ pentru orice } a \in \mathbb{R}.$$

4° Pentru orice număr real a există **opusul** său, numărul $-a$, astfel încât $a + (-a) = 0$.Pentru orice număr real nenul a există **inversul** său, numărul $\frac{1}{a}$, astfel încât

$$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1.$$

5°

—

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \text{ pentru orice } a \in \mathbb{R}.$$

6° **Distributivitatea înmulțirii față de adunare (scădere):**

$$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c \text{ pentru orice } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Observații. 1. $a - b = a + (-b)$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

2. $a : b = a \cdot \frac{1}{b}$ pentru orice $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$.

Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor în mulțimea \mathbb{R}

- I. Într-o expresie fără paranteze, cu operații de diferite ordine, se efectuează (în ordinea în care sînt scrise) întîi extragerea rădăcinii pătrate și ridicarea la putere, apoi înmulțirea și împărțirea și, la sfîrșit, adunarea și scăderea.
- II. Într-o expresie cu paranteze se efectuează întîi operațiile din paranteze, respectîndu-se regulile precedente.

2.2. Compararea numerelor reale

- Comparați numerele: a) $\frac{2}{3}$ și $\frac{3}{4}$; b) $\sqrt{2}$ și 1,3; c) $4 - \sqrt{5}$ și -3 .

Rezolvare:

$$\text{a) } \frac{2}{3} < \frac{3}{4} \longrightarrow \text{deoarece } \frac{2}{3} = 0,(\overline{6}), \frac{3}{4} = 0,75 \text{ și } 0,(\overline{6}) < 0,75;$$

$$\text{b) } \sqrt{2} > 1,3 \longrightarrow \text{deoarece } \sqrt{2} \approx 1,4 \text{ și } 1,4 > 1,3;$$

$$\text{c) } 4 - \sqrt{5} > -3 \longrightarrow \text{deoarece } \sqrt{5} \approx 2,2; \text{ deci, } 4 - \sqrt{5} > 0, \text{ iar } -3 < 0.$$

Atenție! Oricare două numere reale pot fi comparate, adică oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$, avem $a < b$ sau $a = b$.

Dacă $a = b$ sau $a < b$ ($a > b$), scriem $a \leq b$ ($a \geq b$).

APLICĂM

- Scrieți în ordine crescătoare numerele $\sqrt{7}$, 5 , $2\sqrt{2}$, -3 .

Rezolvare:

Avem $\sqrt{7} \approx 2,6$, $2\sqrt{2} \approx 2,8$. Deci, $2\sqrt{2} > \sqrt{7}$. Cum $-3 < \sqrt{7} < 2\sqrt{2} < 5$, obținem ordonarea cerută: $-3, \sqrt{7}, 2\sqrt{2}, 5$.

Legătura dintre relația de ordine „ \leq ” și operațiile de adunare și înmulțire în mulțimea \mathbb{R} se exprimă prin următoarele **proprietăți**:

- 1° Dacă $a \leq b$ și $c \in \mathbb{R}$, atunci $a + c \leq b + c$ pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- 2° Dacă $a \leq b$ și $c \leq d$, atunci $a + c \leq b + d$ pentru orice $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
- 3° Dacă $a \leq b$ și $c > 0$, atunci $ac \leq bc$ pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- 4° Dacă $a \leq b$ și $c < 0$, atunci $ac \geq bc$ pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- 5° Dacă $a \leq b, c \leq d$ și $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^*$, atunci $ac \leq bd$ și $\frac{a}{d} \leq \frac{b}{c}$.

Observație. Proprietăți similare pot fi obținute înlocuind semnul „ \leq ” cu oricare dintre semnele „ $<$ ”, „ \geq ”, „ $>$ ”.

Numerele reale pot fi comparate folosind aproximările lor zecimale sau reprezentările lor pe axa numerelor.



Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:
 - a) $3\sqrt{2}(2 + \sqrt{2}) - 5(3,5 - \sqrt{6}) + 11 : (7 - 1,5)$;
 - b) $\frac{2}{5} \cdot 0,25 + 78 : 4 - 8\sqrt{5} : \sqrt{5} - 3 \cdot 7\sqrt{2}$.
2. Calculați cu aproximație de 0,001:
 - a) $\sqrt{7}$;
 - b) $\sqrt{3}$;
 - c) $2\sqrt{2}$;
 - d) $3\sqrt{5}$.
3. Comparați numerele:
 - a) $\frac{5}{7}$ și $\frac{3}{4}$;
 - b) $\sqrt{7}$ și 2,65;
 - c) $3 - \sqrt{2}$ și 1,7;
 - d) $1 + \sqrt{3}$ și $2 + \sqrt{2}$.
4. Scrieți în ordine crescătoare: $3\sqrt{2}$; $-3, (56)$; $2\sqrt{3}$; $1 + \sqrt{2}$; $2, (15)$; $-2\frac{1}{5}$; $2 - \sqrt{5}$.
5. Legumele crude (100 g) conțin 27 mg de acid ascorbic (vitamina C). Aceleași legume, fierte, conțin 18 mg de acid ascorbic. Calculați, în procente, pierderea vitaminei C în timpul fierberii.
6. Pentru a prepara o prăjitură de ciocolată (6 porții) se folosesc următoarele ingrediente: 250 g de unt, 200 g de zahăr, 300 g de ciocolată, 6 ouă și 3 linguri de făină. Care sînt cantitățile necesare pentru fiecare ingredient în cazul în care se prepară 4 porții?

7. Pe eticheta unei sticlucțe cu mixtură este scris: 40 ± 3 ml. Ce puteți spune despre cantitatea de mixtură din sticlucță?
8. Scrieți ca sumă, diferență, produs și cât de două numere reale, diferite de 0 și 1, numărul:
- a) $3\sqrt{7}$; b) $8 + \sqrt{5}$; c) $-2\sqrt{3}$; d) $-7,5$; e) 18; f) $\sqrt{6} - \sqrt{11}$.

Formăm capacitățile și aplicăm

9. De câte ori la cel mai mare număr de o cifră trebuie adăugat cel mai mare număr de două cifre pentru a obține cel mai mare număr de trei cifre?
10. Suma, produsul și câtul căror numere reale sînt egale între ele?
11. Completați șirul 12; 18; 27; 40,5; ■; ■.
12. Schimbați poziția unui chibrit, astfel încît să obțineți o propoziție adevărată:
- a)  b) 
13. Efectuați: a) $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$; b) $(2\sqrt{7} + 1)^2$; c) $(3 - \sqrt{7})^2$; d) $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{5})^2$.
14. Efectuați: a) $(2 - \sqrt{3})^3$; b) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^3$; c) $(3\sqrt{5} + 1)^3$; d) $(2 + \sqrt{3})^3$.
15. Calculați, prin rotunjire, cu aproximație de 0,002:
- a) $3\sqrt{7} + 2\sqrt{5}$; b) $7\sqrt{2} - 9\sqrt{3}$; c) $-3\sqrt{2} - 5$; d) $3(\sqrt{5} - \sqrt{2})$.
16. Stabiliți legitatea și aflați numărul omis:

$\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$	2	$11 - 4\sqrt{6}$
$1 + \sqrt{5}$	3	?

17. Prețul unui televizor s-a majorat cu 20%, apoi, peste o lună, cu încă 20%. Cu câte procente s-a majorat prețul inițial al televizorului?
18. La copierea exercițiului $20 : 5 \cdot 2 + 6^2$ un elev a uitat să pună paranteze. Restabiliți parantezele, dacă se știe că răspunsul trebuie să fie numărul: a) 38; b) 196; c) 152.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

19. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:
- a) $\sqrt{(2 - 3\sqrt{3})^2} + 2|3 - \sqrt{13}| - 7,5(4 - \sqrt{8})^2 + 6,4 : (5 - 1,8)$;
 b) $|7 - 2\sqrt{3}| + |1 - 3\sqrt{3}|^2 - 6(\sqrt{3} + 8) - \sqrt{(2 - 7\sqrt{3})^2}$.
20. Efectuați:
- a) $(a - b + c)^2$; b) $(a - b - c)^2$; c) $(a + b + c)^2$.
21. Calculați:
- a) $7, (15) + 2, (18) - 5, (23) + 11, (20)$; b) $-5, 2(7) + 6, 1(3) - 3, 5(3) + 2, 2(2)$.
22. Scrieți numărul 34000 ca diferența pătratelor a două numere naturale.

§ 3. Puteri și radicali

3.1. Rădăcina pătrată a unui număr real și proprietățile ei. Recapitulare și completări

- Calculați: a) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$; b) $\sqrt{16-6\sqrt{7}}$.

Rezolvare:

a) $\sqrt{6\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$ —————> deoarece $\frac{5}{2} \geq 0$ și $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$;

b) $\sqrt{16-6\sqrt{7}} = \sqrt{(\sqrt{7}-3)^2} =$
 $= |\sqrt{7}-3| = 3-\sqrt{7}$ —————> deoarece $(3-\sqrt{7}) \geq 0$ și $(3-\sqrt{7})^2 = 16-6\sqrt{7}$.

Definiție

Rădăcină pătrată a unui număr real nenegativ a (sau **radical de ordinul doi din a**) se numește numărul real nenegativ b al cărui pătrat este a .

Rădăcina pătrată a numărului real nenegativ a se notează \sqrt{a} .

Proprietăți ale rădăcinii pătrate

1° Dacă a este un număr real, atunci $\sqrt{a^2} = |a|$.

2° Dacă a și b sînt numere reale nenegative, atunci $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

3° Dacă a este un număr real nenegativ, iar b – un număr real pozitiv, atunci $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

4° Dacă a este un număr real, iar b – un număr real nenegativ, atunci $\sqrt{a^2b} = |a| \cdot \sqrt{b}$.

APLICĂM

- Calculați $\frac{\sqrt{3,6}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{10}}$.

Rezolvare:

$\frac{\sqrt{3,6}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{3,6}{3}} \cdot \sqrt{\frac{48}{10}} =$ —————> aplicăm proprietatea 3°
 $= \sqrt{\frac{3,6 \cdot 48}{10 \cdot 3}} = \sqrt{0,36} \cdot \sqrt{16} =$ —————> aplicăm proprietatea 2°
 $= 0,6 \cdot 4 = 2,4.$

- Aduceți la forma cea mai simplă expresia $\frac{3b^2}{5a} \cdot \sqrt{\frac{50a^2}{81b^2}}$, dacă $a < 0, b > 0$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \frac{3b^2}{5a} \cdot \sqrt{\frac{50a^2}{81b^2}} &= \frac{3b^2}{5a} \cdot \frac{\sqrt{50a^2}}{\sqrt{81b^2}} = && \text{aplicăm proprietatea} \\ &= \frac{3b^2 \cdot \sqrt{50} \cdot \sqrt{a^2}}{5a \cdot \sqrt{81} \cdot \sqrt{b^2}} = && \text{aplicăm proprietatea} \\ &= \frac{3b^2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot |a|}{5a \cdot 9 \cdot |b|} = && \text{aplicăm proprietatea} \\ &= \frac{b^2 \cdot (-a) \cdot \sqrt{2}}{a \cdot 3b} = -\frac{b\sqrt{2}}{3} && \text{deoarece } a < 0, b > 0. \end{aligned}$$



INVESTIGĂM

- Raționalizați numitorul raportului: a) $\frac{14}{3\sqrt{7}}$; b) $\frac{3}{4-\sqrt{10}}$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{14}{3\sqrt{7}} &= \frac{14 \cdot \sqrt{7}}{3\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = && \text{amplificăm raportul cu } \sqrt{7} \\ &= \frac{14\sqrt{7}}{3 \cdot 7} = \frac{2\sqrt{7}}{3}; \\ \text{b) } \frac{3}{4-\sqrt{10}} &= \frac{3(4+\sqrt{10})}{(4-\sqrt{10})(4+\sqrt{10})} = && \text{amplificăm raportul cu expresia} \\ &= \frac{3(4+\sqrt{10})}{16-10} = \frac{3(4+\sqrt{10})}{6} = \frac{4+\sqrt{10}}{2}. && \text{conjugată a numitorului: } 4+\sqrt{10} \end{aligned}$$

Definiție

Expresiile $a + \sqrt{b}$ și $a - \sqrt{b}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, se numesc **expresii conjugate**.

⇒ **Raționalizare a numitorului unui raport** se numește transformarea care elimină radicalii de la numitorul acestuia.

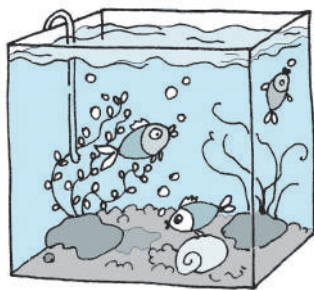
GENERALIZĂM

• Fie E o expresie. Raționalizarea numitorului unui raport poate fi efectuată amplificând raportul de tipul:

1. $\frac{E}{a\sqrt{b}}$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}_+$, cu \sqrt{b} ;
2. $\frac{E}{a \pm \sqrt{b}}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}_+$, cu expresia conjugată a numitorului raportului dat.

3.2. Noțiunea de radical de ordinul trei (opțional)

• Tatăl a hotărât să-i dăruiască lui Sergiu un acvariu de formă cubică, cu volumul de $64\,000\text{ cm}^3$. El i-a propus fiului să determine dimensiunile acvariului pentru a-i găsi un loc potrivit în apartament.



Cum va afla Sergiu dimensiunile acvariului?

Rezolvare:

Fie b lungimea muchiei acestui cub, atunci volumul lui este $V = b^3$. Din condiția problemei rezultă că trebuie să aflăm un număr b , astfel încât $b^3 = 64\,000$. Obținem $b = 40$, deoarece $40^3 = 64\,000$.

Răspuns: Acvariul va avea dimensiunile 40 cm, 40 cm, 40 cm.

Rezolvând problema, am obținut $b = 40$, astfel încât $b^3 = 64\,000$. Numărul b este radical de ordinul trei din numărul 64 000 și se notează $\sqrt[3]{64\,000} = 40$.

Definiție

Numărul real b se numește **radical de ordinul trei** din numărul real a (sau **rădăcină cubică** a numărului a), dacă $b^3 = a$.

Radicalul de ordinul trei din numărul a se notează $\sqrt[3]{a}$.

APLICĂM

Calculați: a) $\sqrt[3]{125}$; b) $\sqrt[3]{-8}$; c) $\sqrt[3]{0,027}$; d) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$.

Rezolvare:

- | | | |
|--|---|--------------------------|
| a) $\sqrt[3]{125} = 5$ | → | deoarece $5^3 = 125$; |
| b) $\sqrt[3]{-8} = -2$ | → | deoarece $(-2)^3 = -8$; |
| c) $\sqrt[3]{0,027} = 0,3$ | → | deoarece \square ; |
| d) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}} = \sqrt{\frac{64}{27}} = \frac{4}{3}$ | → | deoarece \square . |

3.3. Puteri cu exponent întreg. Recapitulare și completări

• Calculați: a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$; b) $(1,2)^0$; c) 5^{-3} .

Rezolvare:

- | | | |
|--|---|--|
| a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81}$; | → | $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$ |
| b) $(1,2)^0 = 1$; | → | $a^0 = 1, a \in \mathbb{R}^*$ |
| c) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$. | → | $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{Z}^*$ |

Definiția puterilor cu exponent întreg

Pentru $a \in \mathbb{R}^*$ și $n \in \mathbb{N}^*$, $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factori}}$.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \in \mathbb{R}^*, \quad n \in \mathbb{Z}^*. \quad a^0 = 1, \quad a \in \mathbb{R}^*.$$

Pentru $a = 0$ și $n \in \mathbb{N}^*$, $0^n = 0$.

Observație. Expresia 0^0 nu are sens.

Proprietăți ale puterilor cu exponent întreg

Pentru $a, b \in \mathbb{R}^*$, $k, m \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad a^k \cdot a^m &= a^{k+m}; & 2^\circ \quad \frac{a^k}{a^m} &= a^{k-m}; & 3^\circ \quad (ab)^m &= a^m \cdot b^m; \\ 4^\circ \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m &= \frac{a^m}{b^m}; & 5^\circ \quad (a^k)^m &= a^{k \cdot m}. \end{aligned}$$

APLICĂM

• Calculați $\frac{3^{-3} \cdot 3^2}{3^4}$.

Rezolvare:

$$\frac{3^{-3} \cdot 3^2}{3^4} = 3^{-3+2-4} = 3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}.$$

• Aduceți la forma cea mai simplă $\left(\frac{2a^2}{5b^5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2a^2}{5b^3}\right)^3$.

Rezolvare:

$$\left(\frac{2a^2}{5b^5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2a^2}{5b^3}\right)^3 = \frac{2^{-2} \cdot a^{-4}}{5^{-2} \cdot b^{-10}} \cdot \frac{2^3 \cdot a^6}{5^3 \cdot b^9} = \frac{2^{-2+3} \cdot a^{-4+6}}{5^{-2+3} \cdot b^{-10+9}} = \frac{2a^2}{5b^{-1}} = \frac{2a^2b}{5}.$$

Exercițiu. Exprimați în cuvinte proprietățile 1° – 5° .

Exerciții și probleme**Fixăm cunoștințele**

1. Calculați:

a) $\sqrt{10 \cdot 40}$; b) $\sqrt{\frac{2}{32}}$; c) $\sqrt{0,16 \cdot 25 \cdot 1,69}$; d) $\sqrt{3\frac{1}{16}}$; e) $\sqrt{3^4}$; f) $\sqrt{\frac{2^6}{5^4}}$.

2. Aflați valorile numărului real a pentru care este adevărată egalitatea:

a) $\sqrt{(a-2)^2} = a-2$; b) $\sqrt{\frac{a^2}{4}} = -\frac{a}{2}$; c) $\sqrt{\frac{3}{a^2+2a+1}} = \frac{\sqrt{3}}{a+1}$.

3. Introduceți factorul sub radical:

a) $\frac{2}{3}\sqrt{27}$; b) $a\sqrt{3}$, $a < 0$; c) $(b-1)\sqrt{b}$, $b \geq 1$.

4. Scoateți factorul de sub radical:

a) $\sqrt{48}$; b) $\sqrt{98}$; c) $\sqrt{5a^4}$; d) $\sqrt{7(2-a)^2}$, $a < 2$.

5. Scrieți ca putere cu baza 10: 1 000; 100; 10; 1; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$; 0,0001.

6. Calculați:

a) $\frac{3^{-4}}{3^{-7}}$; b) $5^{-11} \cdot 5^9$; c) $\left(\frac{3}{11}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{11}\right)^{-3}$; d) $6^2 \cdot 24^{-2}$.

7. Efectuați:

a) $2a^{-3} \cdot 5a^5$; b) $\frac{7x^{-3}}{28x^{-4}}$; c) $\left(\frac{1}{2}b^{-3}\right)^{-2}$; d) $\left(\frac{1}{10}y^2\right)^{-3}$.

Formăm capacitățile și aplicăm

8. Calculați: a) $10\sqrt{1,44} + \sqrt{48} - \sqrt{12} - \frac{6}{\sqrt{3}} - 5\sqrt{0,16}$; b) $\frac{1}{\sqrt{7}-2} - \frac{1}{\sqrt{7}+2}$.

9. Raționalizați numitorul raportului:

a) $\frac{7}{3\sqrt{21}}$; b) $\frac{6}{5\sqrt{10}}$; c) $\frac{2}{1+\sqrt{3}}$; d) $\frac{\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}}$; e) $\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$.

10. Aduceți la forma cea mai simplă:

a) $\sqrt{3}(\sqrt{12} - 2\sqrt{27})$; b) $\sqrt{48} - 2\sqrt{3}(2 - 5\sqrt{12})$;
c) $(3 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$; d) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120}$.

11. Simplificați raportul:

a) $\frac{x^2 - 5}{x + \sqrt{5}}$; b) $\frac{3 + \sqrt{a}}{3\sqrt{a} + a}$; c) $\frac{\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2} - 1}$; d) $\frac{2\sqrt{7} - 7}{\sqrt{7}}$.

12. Calculați:

a) $\frac{6^{-10}}{81^{-2} \cdot 32^{-2}}$; b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-25} \cdot 25^{-6} \cdot 125^{-4}$; c) $\frac{20^{-4} \cdot 15^{-3}}{30^{-7}}$;
d) $\frac{(-3)^{-4} \cdot 27^{10}}{81^9 \cdot 9^{-6}}$; e) $(10^{-2} - 1)(10^{-2} + 1)$; f) $\frac{(2^3)^5 \cdot (2^{-6})^2}{4^2}$.

13. Calculați:

a) $(2,5 \cdot 10^{-3}) \cdot (8,4 \cdot 10^4)$; b) $(4,5 \cdot 10^{-2}) : (1,5 \cdot 10^{-3})$;
c) $(3,6 \cdot 10^5) \cdot [(2,4)^{-1} \cdot 10^{-2}]$; d) $(6,4 \cdot 10^{-4}) : (1,6 \cdot 10^{-3})$.

14. Masa Soarelui este de aproximativ $0,2 \cdot 10^{31}$ kg. De câte ori este mai mare masa Soarelui decât masa Pământului, dacă se știe că masa Pământului este de aproximativ $0,5974 \cdot 10^{25}$ kg?

15. Distanța medie de la Pământ la Soare este de $0,1496 \cdot 10^9$ km. În cât timp o rază de lumină parcurge această distanță, dacă viteza luminii este de aproximativ $0,3 \cdot 10^9$ m/s?

Dezvoltăm capacitățile și creăm

16. Calculați: a) $\sqrt{2,5 \cdot 10^5}$; b) $\sqrt{4,9 \cdot 10^{-3}}$; c) $\sqrt{1,6 \cdot 10^7}$; d) $\sqrt{8,1 \cdot 10^{-5}}$.

17. Aduceți la forma cea mai simplă:

a) $\left(\sqrt{10 - \sqrt{19}} + \sqrt{10 + \sqrt{19}}\right)^2$; b) $\left(\sqrt{2\sqrt{5} + 4} - \sqrt{2\sqrt{5} - 4}\right)^2$.

18. a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{6}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{6}} = 3$;

c) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}$;

b) $\sqrt{7 - \sqrt{40}} = \sqrt{5} - \sqrt{2}$;

d) $1 - 2\sqrt{7} = \sqrt{29 - 4\sqrt{7}}$.



19. Simplificați raportul ($n \in \mathbb{N}$):

a) $\frac{2^{n+1} \cdot 3^{n-1}}{6^n}$;

b) $\frac{14^n}{2^{n-2} \cdot 7^{n+2}}$;

c) $\frac{12^n}{3^{n-1} \cdot 2^{2n+1}}$;

d) $\frac{2^{2n+1} \cdot 5^{2n-1}}{100^n}$.

20. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $\sqrt{8-\sqrt{15}}$;

b) $\sqrt{4+\sqrt{15}} + \sqrt{4-\sqrt{15}}$;

c) $\sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}}$.

Indicație. Aplicați formulele radicalilor compuși:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}, \quad a, b, (a^2 - b) \in \mathbb{R}_+.$$

Exerciții și probleme recapitulative

■ Fixăm cunoștințele

1. Efectuați:

a) $6,5 \cdot (1,2 - 4, (3)) - 9,9 : 3 + 7,4 \cdot 5 - 450$;

b) $(7 - \sqrt{2})(5 + \sqrt{3}) - 3\sqrt{6} - 4\sqrt{3} + 10(\sqrt{2} - \sqrt{3})$.

2. 1) Scrieți ca număr zecimal fracția: a) $\frac{16}{23}$;

b) $\frac{28}{105}$;

c) $\frac{65}{302}$;

d) $\frac{178}{6004}$.

2) Aflați perioada fiecărui număr zecimal obținut.

3. Comparați:

a) $\sqrt{7}$ și $\sqrt{10}$;

b) $\sqrt{63}$ și $\sqrt{54}$;

c) $\sqrt{23}$ și $\sqrt{103}$;

d) $\sqrt{17}$ și 4,5;

e) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$ și $\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}$;

f) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{12}}$ și $\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{5}}$.

4. Explicitați modulul:

a) $|7, (5)|$;

b) $|-3\sqrt{7}|$;

c) $|2 - 3\sqrt{2}|$;

d) $|8 - \sqrt{66}|$.

5. Scrieți în ordine crescătoare:

a) $7,2(3); \sqrt{7}; -3\sqrt{5}; 7,1; \sqrt{19}; \sqrt{25}$.

b) $4\sqrt{3}; 2\sqrt{10}; 5\sqrt{2}; 7$.

6. Utilizând calculatorul de buzunar, calculați cu aproximație de 0,01:

a) $\sqrt{6}$;

b) $\sqrt{11}$;

c) $\sqrt{29}$;

d) $\sqrt{37}$.

7. Aduceți la forma cea mai simplă:

a) $a^8 \cdot (a^{-4})^3, a \in \mathbb{R}^*$;

b) $(c^{-3} \cdot c^8)^{-2}, c \in \mathbb{R}^*$;

c) $\left(\frac{m^3}{m^{-5}}\right)^{-2} \cdot m^{-4}, m \in \mathbb{R}^*$;

d) $\left(\frac{3x^3}{x^{-2}}\right)^{-1}, x \in \mathbb{R}^*$.

8. Dintr-un număr de două cifre, înmulțit cu un număr de o cifră, se scade un număr de o cifră și se obține 1. Care sînt aceste numere?

9. Alina avea o bancnotă de 50 lei, una de 10 lei, două de 1 leu și 3 monede de 50 bani. După ce a făcut cumpărături, i-au rămas 20% din întreaga sumă. Cît a cheltuit Alina?

■ ■ Formăm capacitățile și aplicăm

10. Scrieți ca sumă, diferență, produs și cît de două numere reale, diferite de 0 și 1, numărul:

a) $-2\sqrt{11}$;

b) $2 - \sqrt{3}$;

c) $1 + 3\sqrt{7}$;

d) $7\sqrt{13}$.

11. Efectuați:

a) $(3 - 2\sqrt{5})^2$;

b) $(2 + \sqrt{7})^2$;

c) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^3$;

d) $(5 + \sqrt{5})^3$.

12. Calculați cu aproximație de 0,1 soluțiile ecuației:

a) $3x^2 - x - 1 = 0$; b) $-x^2 + 5x - 1 = 0$; c) $4x^2 - x - 2 = 0$; d) $x^2 - 3x - 8 = 0$.

13. Explicitați modulul:

a) $|1 - 3\sqrt{3}|$; b) $|-7 + \sqrt{16}|$; c) $|-(3 - \sqrt{5})|^2$; d) $|2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}|$.

14. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

a) $|x^2 - 3x + 1| = 5$; b) $|2x^2 - x + 2| = 2$; c) $|4x^2 - 7| = 9$; d) $|x - 2x^2| = 3$.

15. Comparați numerele:

a) $5 - 2\sqrt{3}$ ■ $2 + \sqrt{2}$; b) $6 + \sqrt{7}$ ■ $4\sqrt{7}$.

16. Reprezentați pe axa numerelor mulțimea:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq \sqrt{5}\}$; b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+1| < \sqrt{3}\}$; c) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-3| \geq 1,5\}$.

17. Scrieți ca fracție numărul zecimal:

a) 6,(7); b) 15,(25); c) 3,2(17); d) 0,123(7).

18. Aduceți la forma cea mai simplă:

a) $\sqrt{16x^2}$, dacă $x < 0$; b) $\sqrt{0,81a^2b^2}$, dacă $a > 0$, $b < 0$;
c) $\sqrt{24m^3n^2}$, dacă $n > 0$; d) $\sqrt{8x^4y^6}$, dacă $y < 0$.

19. Calculați:

a) $\frac{6,6 \cdot 10^5}{1,1 \cdot 10^{-7}}$; b) $\frac{5,6 \cdot 10^{-2}}{7 \cdot 10^{-3}}$; c) $\frac{1,9 \cdot 10^{-5}}{3,8 \cdot 10^{-4}}$.

20. Dintr-o foaie de tablă de formă pătrată s-a tăiat o fișie cu lățimea de 25 cm. Aflați dimensiunile inițiale ale foii de tablă, dacă se știe că aria părții rămase după tăiere este de 4400 cm^2 .

21. Tatăl îi spune fiului: „10 ani în urmă eu eram de 10 ori mai în vârstă decât tine, iar peste 22 de ani voi fi numai de două ori mai în vârstă.” Cîți ani are acum tatăl și cîți fiul?

22. Determinați probabilitatea obținerii unui multiplu al lui 2 la aruncarea unui zar.

23. O cărămidă are masa de 1,5 kg și încă a unei jumătăți de aceeași cărămidă. Care este masa cărămidzii?

24. Un pepene verde are masa de 3,5 kg și încă a unei jumătăți de același pepene. Care este masa pepenelui?

■ ■ ■ Dezvoltăm capacitățile și creăm

25. Reprezentați geometric pe axa numerelor punctele: $A(\sqrt{5}+1)$, $B(2+\sqrt{3})$, $C(\sqrt{3}-\sqrt{2})$, $D(\sqrt{7}-4)$.

26. Efectuați: a) $(\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + \sqrt{5})^2$; b) $(2\sqrt{3} + 2\sqrt{5} - \sqrt{2})^2$.

27. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

a) $|x|(|x-3)| = 5$; b) $x^2 - |x| - 2 = 0$; c) $\sqrt{(3-x)^2} = 3 - |3-x|^2$;
d) $(|x-3|)(|x+5|) - 1 = 0$; e) $\sqrt{(x+4)^2} = 5 - |4+x|^2$.

28. Aduceți la forma cea mai simplă:

a) $(x^{-2} - y^{-2}) : (x^{-1} + y^{-1})$, $x, y \in \mathbb{R}^*$; b) $(a+b)^{-2} \cdot (a^{-2} - b^{-2})$, $a, b \in \mathbb{R}^*$.

29. Cu ce este egală: a) diferența $|a| - a$, $a \in \mathbb{R}$; b) suma $|a| + a$, $a \in \mathbb{R}$?

30. Demonstrați că: a) produsul oricăror trei numere naturale consecutive se divide cu 6;

b) produsul a două numere pare consecutive este multiplu al lui 8.

Test sumativ

Timpefectiv de lucru:
45 de minute



Varianta I

1. Fie $A = \{-3; 0; 5, (4); |\pi - 4|; 7; \sqrt{4}; \sqrt{5}\}$.

a) Completați caseta: $\text{card } A = \square$.

b) Aflați: $A \cap \mathbf{N}$; $A \cap \mathbf{Z}$; $A \cap \mathbf{Q}$.

c) Ordonăți crescător elementele mulțimii A .

d) Rezolvați în \mathbf{R} ecuația:

$$[18 \cdot (-3)^3 - 7^{-2} \cdot 5, (4)] \cdot (x-1) = \sqrt{4} + 2x.$$

2. Fie expresia $E = \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{4})^2} + \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{4})^2} + 2(\sqrt{5} - 2)$.

a) Aflați valoarea expresiei E .

b) Aflați inversul numărului obținut în a).

3. Alisia are o bancnotă de 100 lei, două bancnote de 50 lei, una de 20 lei, trei de 10 lei și patru de 1 leu. După ce a achitat cumpărătura, Alisiei i-au rămas 12% din suma inițială.

a) Scrieți în casetă „>” sau „<” pentru a obține o propoziție adevărată:

Suma inițială \square 210 lei.

b) Calculați cât a cheltuit Alisia.

c) Aflați ce sumă ar trebui să cheltuiască Alisia, astfel încât să-i rămână 20% din suma inițială.

Varianta II

1. Fie $B = \{|3 - \pi|; -5; 0; \sqrt{9}; 8, (3); -\pi; 6\}$.

a) Completați caseta: $\text{card } B = \square$.

b) Aflați: $B \cap \mathbf{N}$; $B \cap \mathbf{Z}$; $B \cap \mathbf{Q}$.

c) Ordonăți descrescător elementele mulțimii B .

d) Rezolvați în \mathbf{R} ecuația:

$$[(-5)^2 \cdot 8, (3) - 6^{-2} \cdot 18] \cdot (x+1) = \sqrt{9} - 3x.$$

2. Fie expresia $E = \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} - \sqrt{(\sqrt{4} - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{5})^2} - 2(\sqrt{5} - 1)$.

a) Aflați valoarea expresiei E .

b) Aflați inversul numărului obținut în a).

3. Amelia are o bancnotă de 200 lei, două bancnote de 100 lei, una de 50 lei, patru de 5 lei și trei de 1 leu. După ce a achitat facturile de întreținere și utilități, Ameliei i-au rămas 20% din suma inițială.

a) Scrieți în casetă „>” sau „<” pentru a obține o propoziție adevărată:

Suma inițială \square 620 lei.

b) Calculați cât a achitat Amelia pentru întreținere și utilități.

c) Aflați ce sumă ar trebui să plătească Amelia pentru întreținere și utilități, astfel încât să-i rămână 15% din suma inițială.

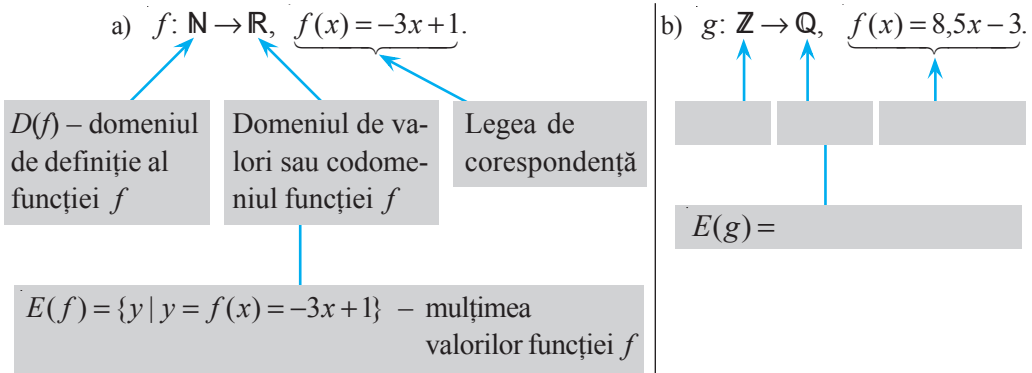
Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	38–37	36–33	32–29	28–23	22–17	16–12	11–8	7–5	4–3	2–0

§ 1. Noțiunea de funcție.
Recapitulare și completări

1.1. Noțiunea de funcție. Moduri de definire a funcției

• Identificați elementele funcției:



Definiție

Fie mulțimile nevide A și B . Se spune că este definită o **funcție** pe mulțimea A cu valori în mulțimea B dacă este stabilită o lege de corespondență, o regulă, un procedeu care asociază *fiecărui* element x din A un *singur* element y din B .

Funcția definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B se notează $f: A \rightarrow B$ (sau $A \xrightarrow{f} B$).

Mulțimea A se numește **domeniul de definiție** al funcției f și se notează $D(f)$.

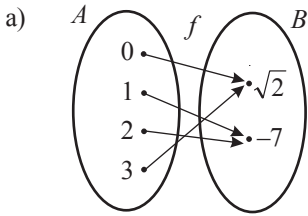
Mulțimea B se numește **domeniul de valori** sau **codomeniul** funcției f .

Valoarea funcției f în x se notează $y = f(x)$; x se numește **variabilă independentă** sau **argument** al funcției f , iar y – **variabilă dependentă**.

Mulțimea valorilor funcției f se notează $E(f) = \{y \mid y = f(x)\}$.

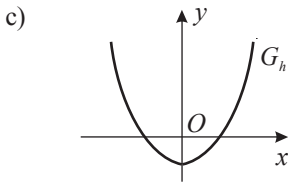
Evident, $E(f) \subseteq B$.

- Fie funcțiile f, g, h, p (fig. 1). Identificați modul de definire a fiecărei funcții.



b)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = g(x)$	-6	-4	-2	0	2	4	6



d) $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p(x) = x^2 + 2.$

Fig. 1

GENERALIZĂM

Moduri de definire a funcției

I. Modul analitic: prin formule.

II. Modul sintetic: printr-o diagramă, printr-un tabel de valori, printr-un grafic.

1.2. Graficul unei funcții

- Examinați desenele din figura 2 și identificați care dintre ele reprezintă graficul unei funcții. Argumentați.

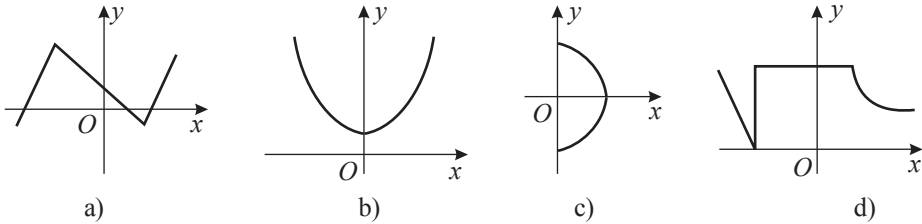


Fig. 2

Definiție

Se numește **graficul funcției** $f: A \rightarrow B$ mulțimea $G_f = \{(x, y) \mid x \in A \text{ și } y = f(x)\}$ sau reprezentarea acestei mulțimi într-un sistem de axe ortogonale.

Așadar, graficul funcției f este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$ sau reprezentarea acestei submulțimi într-un sistem de axe ortogonale.

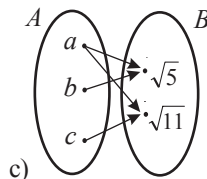
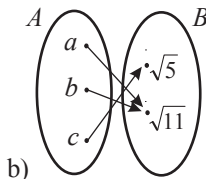
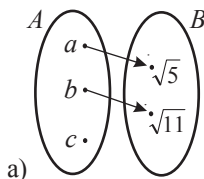
Ecuția $y = f(x)$, verificată de toate elementele $(x, y) \in G_f$, se mai numește **ecuația graficului** funcției f .

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Citiți: a) $f: \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{Z}$; b) $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$; c) $h: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$; d) $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$.

2. Precizați care dintre diagrame definește o funcție.

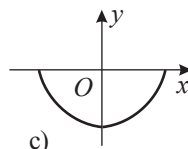
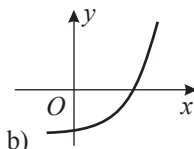
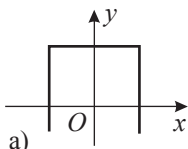


3. Determinați elementele funcției:

a) $f: \{-1, 0, 2, 3\} \rightarrow \{-3, -2, 0, 1\}$, $f(x) = -x$;

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 5x + 12$.

4. Determinați care dintre desene nu reprezintă graficul unei funcții.



Formăm capacitățile și aplicăm

5. Fie mulțimile $A = \{-\sqrt{5}, -3, 0, 2\}$ și $B = \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$.

a) Reprezentați prin diagrame toate funcțiile definite pe A cu valori în B .

b) Trasați graficele funcțiilor obținute la a), completând tablele de valori respective.

6. Determinați dacă este corect definită funcția:

a) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = 2x^2 - 1$;

b) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, $f(x) = -\frac{5}{x}$;

c) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{2}{3}x + 4$;

d) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$.

7. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } x \leq -1 \\ 5 - 3x, & \text{dacă } x > -1. \end{cases}$

Calculați $f(-\sqrt{2})$, $f(-0,1)$, $f(0)$, $f(2\sqrt{5})$.

8. Exprimați printr-o formulă funcția:

$f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(1) = 4$, $f(2) = 7$, $f(3) = 10$, $f(4) = 13$, $f(5) = 16$.

9. Una din bazele unui trapez isoscel este congruentă cu latura laterală, iar măsura unghiului alăturat bazei este de 30° . Exprimați printr-o formulă perimetrul trapezului ca funcție de înălțime.

10. Dați exemple de funcții din diverse domenii (viața de zi cu zi, fizică, chimie, economie, medicină, geometrie, istorie etc.).

Dezvoltăm capacitățile și creăm

11. Fie funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) =$ restul împărțirii numărului n la 5.

a) Calculați $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(5)$, $f(7)$. b) Arătați că $f(n+5) = f(n)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

12. Între variabilele $x, y \in \mathbb{R}$ există relația: a) $3x - y = 7$; b) $x^2 + 3y^2 = 8$.

Se poate exprima y ca funcție de x ? Dar x ca funcție de y ?

§ 2. Funcții numerice. Recapitulare și completări

2.1. Proprietăți ale funcțiilor numerice

2.1.1. Monotonia funcțiilor numerice

Definiție

Funcția $f: A \rightarrow B$ se numește **funcție numerică** sau **funcție reală de variabilă reală** dacă A și B sînt submulțimi ale mulțimii numerelor reale \mathbb{R} .

Exemplu

$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, $f(x) = 0,5x - 1$; $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3x$; $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = -\sqrt{2}x^3$, sînt funcții numerice.

Fie funcția numerică $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, unde $A \subseteq \mathbb{R}$ și $x_1, x_2 \in A$.

Definiții

- ◆ Funcția f se numește **crescătoare (strict crescătoare)** pe mulțimea A , dacă pentru orice $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in A$) avem $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$).
- ◆ Funcția f se numește **descrescătoare (strict descrescătoare)** pe mulțimea A , dacă pentru orice $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in A$) avem $f(x_1) \geq f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).
- ◆ Funcția f se numește **monotonă (strict monotonă)** pe domeniul ei de definiție $D(f)$ sau pe un interval $I \subseteq D(f)$, dacă ea este crescătoare sau descrescătoare (strict crescătoare sau strict descrescătoare) pe $D(f)$ sau pe I (fig. 3).

Exemple

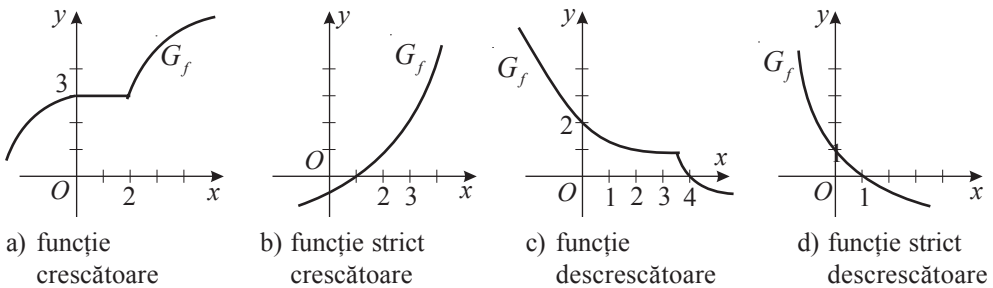


Fig. 3

APLICĂM

• Examinați graficul G_f al funcției f și precizați intervalele ei de monotonie (fig. 4).

Rezolvare:

Funcția f este pe $(-\infty, 1]$, $[3, +\infty)$ și pe $[1, 3]$.

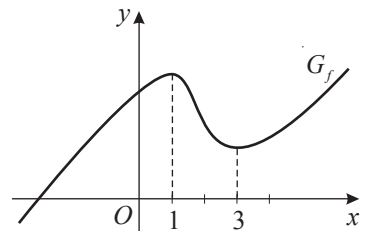


Fig. 4

2.1.2. Zeroul funcției

• Examinați graficul G_f al funcției f și determinați zerourile acestei funcții (fig. 5).

Rezolvare:

Cum graficul G_f intersectează axa Ox în punctul $A(-3, 0)$, rezultă că $x_1 = -3$ este zeroul funcției f . Deoarece $B(2, 0)$ este punct comun al graficului G_f cu axa Ox , adică $f(2) = 0$, rezultă că $x_2 = 2$ este zeroul funcției f .

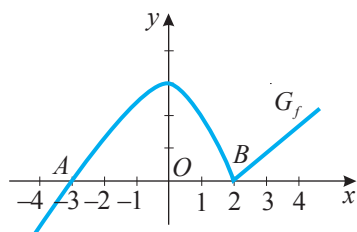


Fig. 5

Răspuns: Funcția f are două zerouri: și .

Definiție

Numărul real a se numește **zeroul funcției** f dacă $f(a) = 0$.

Numărul real a este zero al funcției f dacă și numai dacă punctul $(a, 0)$ este situat pe graficul G_f .

2.2. Funcția numerică $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$

Definiții

♦ Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se numește **funcție de gradul I**.

♦ Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se numește **proporționalitate directă** sau **funcție liniară**.

♦ Numărul real a se numește **coeficient de proporționalitate**.

♦ Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = b$, $b \in \mathbb{R}$, se numește **funcție constantă**.

Observație. Proporționalitatea directă dintre mărimi este funcția de forma $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}_+^*$.

2.2.1. Graficul funcției de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$

Graficul funcției de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, reprezintă o dreaptă:

- care nu trece prin origine și nu este paralelă cu axa Ox , dacă $a \neq 0$, $b \neq 0$ (fig. 6 a));
- care trece prin originea $O(0, 0)$, dacă $b = 0$ (fig. 6 b));
- paralelă cu axa Ox , dacă $a = 0$, $b \neq 0$, sau axa Ox , dacă $a = 0$, $b = 0$ (fig. 6 c)).

Numărul a se numește **panta (coeficientul unghiular)** al dreptei – graficul funcției de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Pentru a construi dreapta – graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, este suficient să se construiască dreapta determinată de două puncte ale graficului funcției f . De regulă, acestea sînt punctele de intersecție a graficului G_f cu axele Ox și Oy .

Pentru funcția liniară $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se determină convenabil un punct și se construiește dreapta ce trece prin originea $O(0, 0)$ și acest punct.

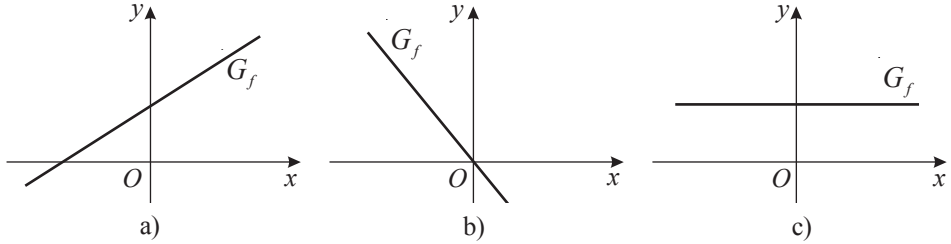


Fig. 6

2.2.2. Proprietăți ale funcției de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$

• Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$ (fig. 7).

- 1) Precizați monotonia funcției f .
- 2) Aflați zeroul funcției f .
- 3) Determinați semnul funcției f .

Rezolvare:

Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ și $x_1 < x_2$.

1) $x_1 < x_2 \Leftrightarrow 3x_1 + 2 < 3x_2 + 2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Prin urmare, funcția f este strict crescătoare pe \mathbb{R} . Constatăm că $a = 3 > 0$.

2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$. Așadar, $x = -\frac{2}{3}$ este zeroul funcției f .

3) $f(x) > 0 \Leftrightarrow 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}$. Prin urmare, funcția f ia

valori negative pentru $x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ și valori pozitive pentru $x \in \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

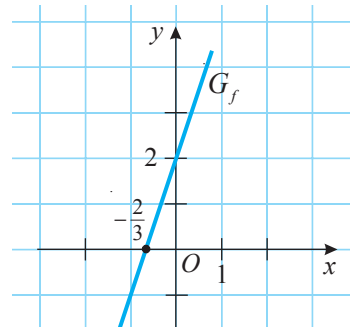


Fig. 7

GENERALIZĂM

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

- Dacă $a = 0$, funcția f este constantă pe \mathbb{R} .
- Dacă $a > 0$, funcția f este strict crescătoare pe \mathbb{R} .
- Dacă $a < 0$, funcția f este strict descrescătoare pe \mathbb{R} .
- Zeroul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, este $x = -\frac{b}{a}$.
- Intervalul pe care funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, ia valori pozitive este mulțimea soluțiilor inecuației $ax + b > 0$, iar intervalul pe care funcția f ia valori negative este mulțimea soluțiilor inecuației $ax + b < 0$.

2.3. Funcția numerică $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{k}{x}$, $k \in \mathbb{R}^*$

Dependența dintre două mărimi x și y , astfel încât, odată cu majorarea (micșorarea) mărimii x , mărimea y se micșorează (majorează) tot de atâtea ori, se numește **proporționalitate inversă**.

Proporționalitatea inversă dintre mărimile x și y este exprimată prin relația $x \cdot y = k$, unde $k \in \mathbb{R}_+^*$ și $x \in (0, +\infty)$.

Definiție

Funcția de forma $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{k}{x}$, $k \in \mathbb{R}^*$, se numește **proporționalitate inversă**.

Graficul proporționalității inverse este o hiperbolă cu două ramuri:

- pentru $k > 0$ ramurile ei sînt situate în cadranele I și III (fig. 8);
- pentru $k < 0$ ramurile ei sînt situate în cadranele II și IV (fig. 9).

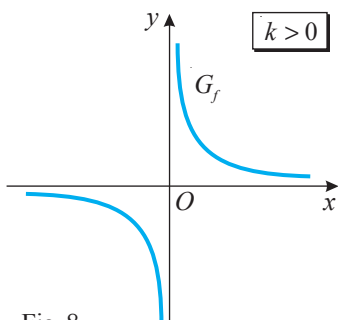


Fig. 8

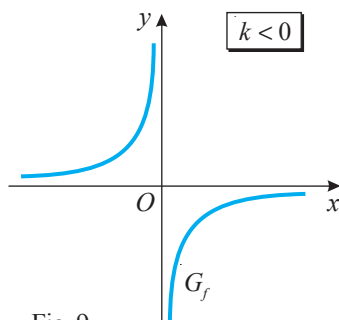


Fig. 9

Proprietăți ale funcției de forma $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{k}{x}$, $k \in \mathbb{R}^*$

1° Funcția f nu are zerouri; graficul G_f nu intersectează nici axa Ox , nici axa Oy .

2° a) Pentru $k > 0$ funcția f ia valori pozitive, dacă $x \in (0, +\infty)$, și valori negative, dacă $x \in (-\infty, 0)$.

b) Pentru $k < 0$ funcția f ia valori pozitive, dacă $x \in \square$, și valori negative, dacă $x \in \square$.

3° a) Pentru $k > 0$ funcția f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.

b) Pentru $k < 0$ funcția f este strict crescătoare pe \square , \square .

4° Pentru $k > 0$ ($k < 0$) observăm: pentru valori ale lui x , pozitive sau negative, din ce în ce mai mari, funcția f ia valori din ce în ce mai mici (mari); pentru valori negative ale lui x din ce în ce mai mici, funcția f ia valori din ce în ce mai mari (mici); pentru valori pozitive ale lui x din ce în ce mai mici, funcția f ia valori din ce în ce mai mari (mici).

5° Observăm că $f(-x) = -f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$.

Într-adevăr, $f(-x) = \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x} = -f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$.

Cum $f(-x) = -f(x)$, rezultă că dacă punctul $A(x_0, y_0) \in G_f$, atunci și punctul $A'(-x_0, -y_0) \in G_f$. Deci, graficul G_f este simetric față de originea $O(0, 0)$ (fig. 8, fig. 9).

2.4. Funcția radical $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{x}$

Definiție

Funcția $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{x}$, se numește **funcție radical**.

Graficul funcției radical este o curbă situată în cadranul I (fig. 10).

Proprietăți ale funcției radical

- 1° Funcția f are un singur zero, $x=0$, deoarece
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
 Graficul G_f intersectează axele Ox și Oy într-un singur punct: $O(0, 0)$.
- 2° Funcția f ia numai valori pozitive pentru $x \in \mathbb{R}_+^*$.
- 3° Funcția f este strict crescătoare pe \mathbb{R}_+ .

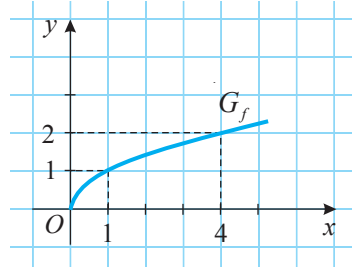


Fig. 10

2.5. Funcția modul (opțional)

Definiție

Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, se numește **funcție modul**.



INVESTIGĂM

- Fie funcția modul $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.
 - a) Trasați graficul G_f .
 - b) Determinați proprietățile funcției f .

Rezolvare:

- a) Explicînd modulul, obținem: $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in [0, +\infty) \\ -x, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$

Prin urmare, pentru $x \in [0, +\infty)$ trasăm graficul funcției $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$, iar pentru $x \in (-\infty, 0)$ – graficul funcției $f: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x$.

Graficul funcției $f(x) = |x|$ este un unghi de 90° cu vîrfurile în originea sistemului de axe ortogonale, astfel încît Oy este bisectoarea acestuia (fig. 11).

b) Proprietăți ale funcției modul

- 1° $f(x) = 0 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Prin urmare, funcția f are un singur zero: $x = 0$.
- 2° Deoarece $|x| \geq 0$, rezultă că pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ funcția f ia valori pozitive.
- 3° Funcția f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe $[0, +\infty)$. (Demonstrați!)

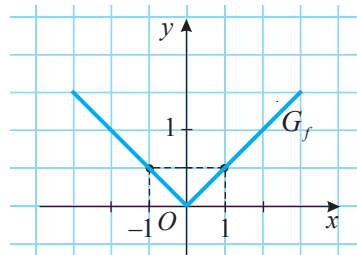


Fig. 11

APLICĂM

- Trasați graficul funcției

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = -|3 - x|.$$

Rezolvare:

Explicitează modulul, obținem:

$$h(x) = -|3 - x| = \begin{cases} x - 3, & \text{dacă } x \in (-\infty, 3] \\ 3 - x, & \text{dacă } x \in (3, +\infty). \end{cases}$$

Graficul funcției h este reprezentat în figura 12.

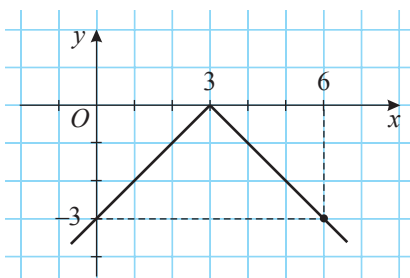


Fig. 12

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

- Fie punctele: $(1, 0)$; $(1, 1)$; $(-2, -11)$; $(-2, 10)$; $(-3, 16)$.
Determinați care dintre aceste puncte aparțin graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
a) $f(x) = 4x - 3$; b) $f(x) = -3x + 4$; c) $f(x) = -5x + 1$.
- Fie funcția: 1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 0,5x - 4$; 2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x + 5$.
a) Reprezentați grafic funcția f . c) Precizați semnul funcției f .
b) Aflați zeroul funcției f . d) Precizați monotonia funcției f .
- Fie funcția: 1) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -0,25x$; 2) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 7x$.
a) Reprezentați grafic funcția g . c) Precizați semnul funcției g .
b) Aflați zeroul funcției g . d) Precizați monotonia funcției g .
- Determinați, fără a reprezenta grafic funcția, dacă este crescătoare sau descrescătoare funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin formula:
a) $f(x) = \sqrt{15}x + 3$; b) $f(x) = -\sqrt{3}x - 5$; c) $f(x) = -x$; d) $f(x) = 7, (8)x$.
- Determinați, fără a reprezenta graficul funcției, în care cadrane sînt situate ramurile hiperbolei – graficul funcției $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$:
a) $f(x) = \frac{1}{x}$; b) $f(x) = -\frac{2}{3x}$; c) $f(x) = -\frac{\sqrt{7}}{x}$; d) $f(x) = -\frac{1 + \sqrt{19}}{x}$.
- Fie funcția radical $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = \sqrt{x}$, și $x \in \{4, 7, 9, 25, -36, 0, -49\}$.
Aflați valorile respective ale funcției f .
- Completați formula cu un număr real, astfel încît funcția obținută $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:
a) $f(x) = \square x - 1$; b) $f(x) = -\square x + 3$; c) $f(x) = \frac{\square}{x}$; d) $f(x) = -\frac{\square}{x}$
să fie: 1) strict crescătoare pe mulțimea D ; 2) strict descrescătoare pe mulțimea D .

Formăm capacitățile și aplicăm

- Reprezentați în același sistem de axe ortogonale graficele funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x + b$, pentru: a) $b = -1$; b) $b = 0$; c) $b = 2$. Ce ați observat?
- Reprezentați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor:
a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -4x$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 4x$;
b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 1 - 2x$.
Ce ați observat?

10. Determinați funcția de gradul I, știind că:

a) $f(1) = 4$ și $f(0) = -3$;

b) $f(0) = 2$ și $f(-2) = 5$;

c) $f(\sqrt{2}) = 2 - \sqrt{3}$ și $f(2\sqrt{6}) = 3\sqrt{3}$;

d) $f(-1) = 3$ și $f(2) = -1$.

11. Reprezentați grafic funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$:

a) $f(x) = -\frac{3}{x}$;

b) $f(x) = \frac{3}{4x}$;

c) $f(x) = -\frac{1}{2x}$;

d) $f(x) = \frac{5}{x}$.

Determinați proprietățile funcției f .

12. Reprezentați graficul funcției $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 2\sqrt{x}$;

b) $f(x) = \sqrt{x} - 1$;

c) $f(x) = \sqrt{x} + 1$;

d) $f(x) = 0,5\sqrt{x}$.

13. Formulați exemple de dependențe funcționale din viața cotidiană.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

14. Fie m un parametru real și funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = (m-2)x + 4$;

b) $f(x) = (m+4)x + m - 6$.

Aflați valorile lui m pentru care funcția f este: 1) crescătoare; 2) descrescătoare.

15. Reprezentați grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \sqrt{|x|}$;

b) $f(x) = \sqrt{|x-2|}$;

c) $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{dacă } x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & \text{dacă } 0 < x \leq 4 \\ 2, & \text{dacă } x > 4. \end{cases}$

16. Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+4}{x-3}$.

Arătați că există $A, B \in \mathbb{R}$, astfel încât $f(x) = A + \frac{B}{x-3}$.

17. Formulați și rezolvați câte un exercițiu asemănător cu exercițiile 9, 10, 14, 16.

• **Problemă pentru campioni** 18. Scrieți o funcție de argument natural, definită cu ajutorul unei formule, ale cărei valori să fie numere prime pentru orice valoare a argumentului.

• **Lucrare practică** Observați, pe parcursul unei săptămâni, cum se schimbă zi de zi, la aceeași oră, temperatura aerului în localitatea voastră. Reprezentați grafic rezultatele obținute. Determinați prin formule funcțiile asociate fiecărei porțiuni de grafic.

§ 3. Funcția de gradul II

3.1. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$



INVESTIGĂM

• Fie un pătrat cu latura a (fig. 13). Construiți o funcție care să descrie dependența ariei pătratului de lungimea laturii sale.

Rezolvare:

Aria unui pătrat cu lungimea laturii a este $\mathcal{A} = a^2$. Prin urmare, dependența ariei pătratului de lungimea laturii sale este descrisă de funcția $g: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $g(x) = x^2$.

Funcția g ne conduce la funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

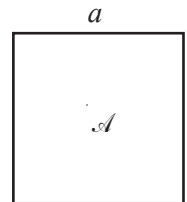


Fig. 13

• Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

a) Reprezentați graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

b) Determinați proprietățile funcției f .

Rezolvare:

a) Completăm tabelul de valori al funcției f pentru valoarea zero, unele valori negative și pozitive ale argumentului x :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

Reprezentăm într-un sistem de axe ortogonale xOy punctele ale căror coordonate sînt valorile din tabel. Unim aceste puncte cu o curbă continuă și obținem graficul G_f (fig. 14).

Graficul G_f al funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, se numește **parabolă**.

Punctul $O(0, 0)$ se numește **vîrfurile parabolei**.

Se spune că această parabolă este cu *ramurile în sus*.



Atenție! La trasarea parabolei am ținut cont de faptul că nu există trei puncte distincte coliniare situate pe parabolă.

b) **Proprietăți ale funcției** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

1° $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Prin urmare, $x = 0$ este zeroul funcției f .

Graficul G_f intersectează axele Ox și Oy într-un singur punct: $O(0, 0)$.

2° $f(x) = x^2 \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Așadar, funcția f ia numai valori nenegative.

3° Funcția f este strict crescătoare pe $[0, +\infty)$ și strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$.

4° Remarcăm că $f(-x) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Într-adevăr, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Atunci $(x, y) \in G_f \Leftrightarrow (-x, y) \in G_f$, ceea ce înseamnă că graficul G_f este simetric față de axa Oy sau că graficul G_f admite axa Oy drept axă de simetrie (fig. 14).

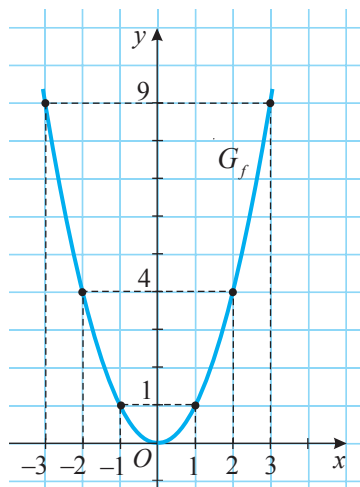


Fig. 14

APLICĂM

• Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

Aflați valorile lui x pentru care valoarea funcției $f(x)$ este: a) 64; b) 0; c) -25.

Rezolvare:

a) $f(x) = 64 \Leftrightarrow x^2 = 64$. Așadar, $x_1 = -8$, $x_2 = 8$.

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$. Prin urmare, $x = 0$.

c) $f(x) = -25 \Leftrightarrow x^2 = -25$. Deci, nu există astfel de valori reale ale lui x .

3.2. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2$, $a \in \mathbb{R}^*$



INVESTIGĂM

• Fie un disc de rază R (fig. 15). Construiți o funcție care să descrie dependența ariei discului de lungimea razei lui.

Rezolvare:

Aflăm aria discului aplicînd formula $\mathcal{A} = \pi R^2$.

Prin urmare, dependența ariei discului de lungimea razei acestuia este descrisă de funcția $h: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $h(x) = \pi x^2$.

Funcția h ne conduce la funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2$, $a \in \mathbb{R}^*$.

• Fie funcția:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2$;

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -2x^2$.

1) Trasați graficele funcțiilor f și g .

2) Determinați proprietățile funcțiilor f și g .

Rezolvare:

1) Completăm tablele de valori ale funcțiilor f și g pentru valoarea zero, unele valori negative și pozitive ale argumentului x :

a)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = 2x^2$	8	2	0	2	8

b)

x	-2	-1	0	1	2
$g(x) = -2x^2$	-8	-2	0	-2	-8

Graficele G_f și G_g , trasate „prin puncte”, sînt reprezentate în figura 16 și respectiv 17. Graficul funcției f , precum și graficul funcției g , se numește **parabolă**.

Punctul $O(0,0)$ se numește **vîrf** **parabolei**.

Se spune că graficul funcției f este o **parabolă cu ramurile în sus**, iar graficul funcției g – o **parabolă cu ramurile în jos**.

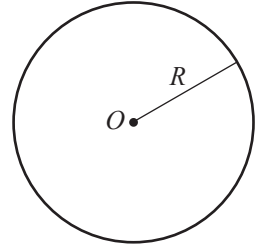


Fig. 15

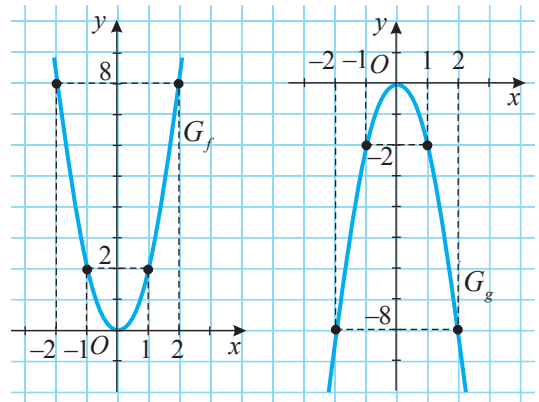


Fig. 16

Fig. 17

2) **Proprietăți ale funcției**

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2$$

- 1° $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Deci, funcția f are un zero: $x = 0$.
Prin urmare, graficul G_f intersectează axele Ox și Oy în punctul $O(0, 0)$.
- 2° $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 \geq 0$. Deci, funcția f ia valori nenegative pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- 3° Funcția f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe $[0, +\infty)$.
- 4° $D(f) = \mathbb{R}$. Deci, din $x \in D(f)$ rezultă că și $-x \in D(f)$.
Cum $f(-x) = 2 \cdot (-x)^2 = 2x^2 = f(x)$, rezultă că G_f este simetric față de axa Oy .
- 5° Punctul $x_0 = 0$ este punct de minim al funcției f și $f(x_0) = \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$.

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -2x^2$$

- 1° $g(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Deci, funcția g are un zero: $x = 0$.
Prin urmare, graficul G_g intersectează axele Ox și Oy în punctul $O(0, 0)$.
- 2° $g(x) \leq 0 \Leftrightarrow -2x^2 \leq 0$. Deci, funcția g ia valori negative sau zero pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- 3° Funcția g este strict crescătoare pe $(-\infty, 0]$ și strict descrescătoare pe $[0, +\infty)$.
- 4° $D(g) = \mathbb{R}$. Deci, din $x \in D(g)$ rezultă că și $-x \in D(g)$.
Cum $g(-x) = -2 \cdot (-x)^2 = -2x^2 = g(x)$, rezultă că G_g este simetric față de axa Oy .
- 5° Punctul $x_0 = 0$ este punct de maxim al funcției g și $g(x_0) = \max_{x \in \mathbb{R}} g(x) = 0$.

Definiții

Fie $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, și $x_0 \in A$.

♦ Valoarea $f(x_0)$ se numește **valoarea minimă** a funcției f pe mulțimea A , dacă $f(x) \geq f(x_0)$ pentru orice $x \in A$. Se notează: $f(x_0) = \min_{x \in A} f(x)$. În acest caz se spune că x_0 este **punct de minim** al funcției f .

♦ Valoarea $f(x_0)$ se numește **valoarea maximă** a funcției f pe mulțimea A , dacă $f(x) \leq f(x_0)$ pentru orice $x \in A$. Se notează: $f(x_0) = \max_{x \in A} f(x)$. În acest caz se spune că x_0 este **punct de maxim** al funcției f .

♦ Punctele de minim și de maxim se numesc **puncte de extrem** ale funcției f , iar valorile funcției f în aceste puncte se numesc **valori extreme** ale funcției f .

Proprietăți ale funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2$, $a \in \mathbb{R}^*$

1° Graficul G_f este o parabolă cu vârful în originea $O(0, 0)$ și:

- are ramurile în sus, dacă $a > 0$;
- are ramurile în jos, dacă $a < 0$.

Graficul G_f intersectează axele Ox și Oy într-un singur punct: $O(0, 0)$.

2° Funcția f are un zero: $x = 0$.

- 3° Funcția f ia valori nenegative, dacă $a > 0$, și valori negative sau zero, dacă $a < 0$.
- 4° a) Pentru $a > 0$ funcția f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe $[0, +\infty)$.
b) Pentru $a < 0$ funcția f este strict crescătoare pe $(-\infty, 0]$ și strict descrescătoare pe $[0, +\infty)$.
- 5° a) Dacă $a > 0$, atunci $f(0) = \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$ și $x_0 = 0$ este punct de minim al funcției f .
b) Dacă $a < 0$, atunci $f(0) = \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$ și $x_0 = 0$ este punct de maxim al funcției f .
- 6° G_f este simetric față de axa Oy .

APLICĂM

- Reprezentați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor:
 - $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$;
 - $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -0,5x^2$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x^2$.

Rezolvare:

Alcătuiți tabelul de valori al funcțiilor f și g :

a)	x	-2	-1	0	1	2
	$f(x) = 2x^2$	8	2	0	2	8
	$g(x) = x^2$	4	1	0	1	4
b)	x	-2	-1	0	1	2
	$f(x) = -0,5x^2$	-2	-0,5	0	-0,5	-2
	$g(x) = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4

Graficele funcțiilor f și g sînt reprezentate în figura 18 și respectiv 19.

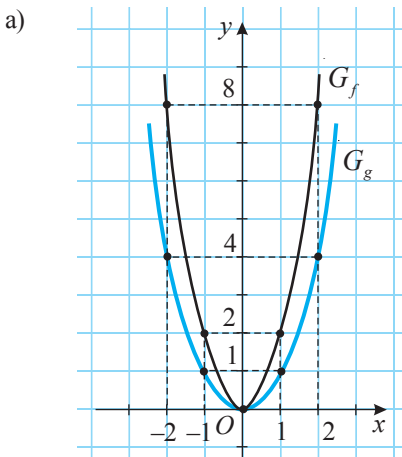


Fig. 18

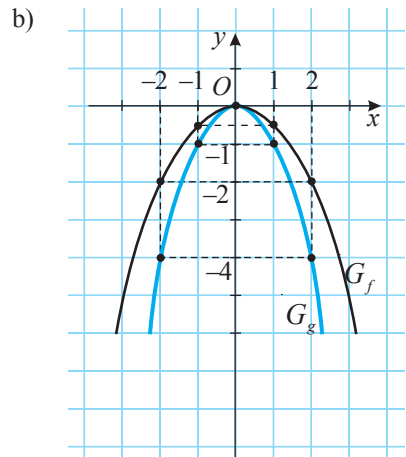


Fig. 19

Observație. Pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2$, $a \in \mathbb{R}^*$, sînt posibile cazurile reprezentate în figurile 20 și 21.

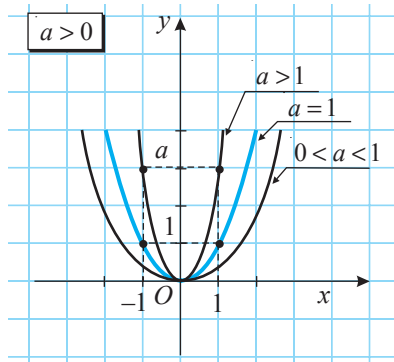


Fig. 20

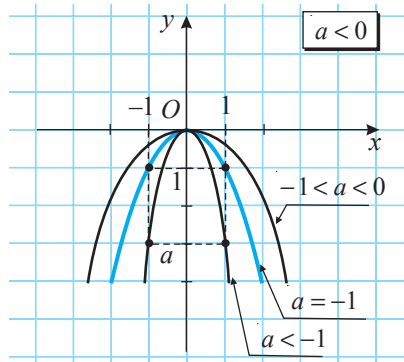


Fig. 21

3.3. Transformarea graficelor

3.3.1. Graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + n$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{R}^*$



INVESTIGĂM

• Fie funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Trasați graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$.

Rezolvare:

Alcătuim tabelul de valori al funcțiilor g și f :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x) = \frac{1}{2}x^2$	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$	10	6,5	4	2,5	2	2,5	4	6,5	10

Graficele funcțiilor g și f sînt reprezentate în figura 22.

Observăm că la translația fiecărui punct al graficului G_g cu 2 unități liniare în sus obținem punctul respectiv al graficului G_f . Astfel, graficul funcției f se obține din graficul funcției g efectuînd translația cu 2 unități liniare de-a lungul axei Oy , în sensul acesteia.

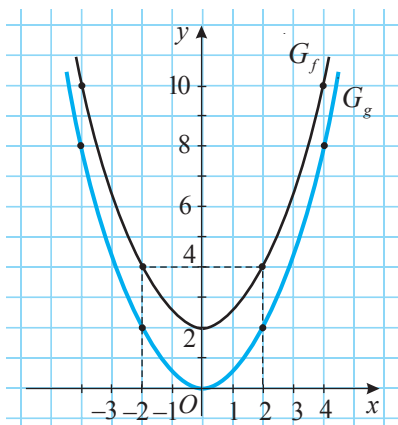


Fig. 22

APLICĂM

• Fie funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Trasați graficul funcției $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$.

Rezolvare:

Alcătuim tabelul de valori al funcțiilor g și h :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x) = \frac{1}{2}x^2$	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8
$h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$	5	1,5	-1	-2,5	-3	-2,5	-1	1,5	5

Graficele funcțiilor g și h sînt reprezentate în figura 23.

Observăm că graficul funcției h se obține din graficul funcției g efectuînd translația cu 3 unități liniare de-a lungul axei Oy , în sensul opus acesteia.

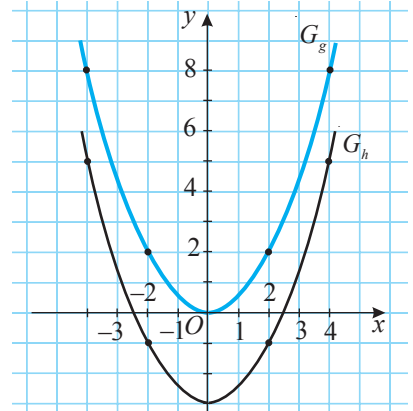


Fig. 23

GENERALIZĂM

Graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + n$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{R}^*$, este o parabolă care se obține din graficul funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = ax^2$, $a \neq 0$, efectuînd translația de-a lungul axei Oy cu n unități liniare în sensul acesteia, dacă $n > 0$, sau cu $-n$ unități liniare în sensul opus acesteia, dacă $n < 0$.

3.3.2. Graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a(x-m)^2$, $a \neq 0$, $m \in \mathbb{R}^*$



INVESTIGĂM

• Fie funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Trasați graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2$.

Rezolvare:

Alcătuim tabelul de valori al funcțiilor g și f :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$g(x) = \frac{1}{2}x^2$	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5	18	24,5
$f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2$	18	12,5	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5

Grafecele funcțiilor g și f sînt reprezentate în figura 24.

Observăm că la translația fiecărui punct al graficului G_g cu 2 unități liniare în dreapta de-a lungul axei Ox obținem punctul respectiv al graficului G_f . Astfel, graficul funcției f se obține din graficul funcției g efectuînd translația cu 2 unități liniare de-a lungul axei Ox , în sensul acesteia.

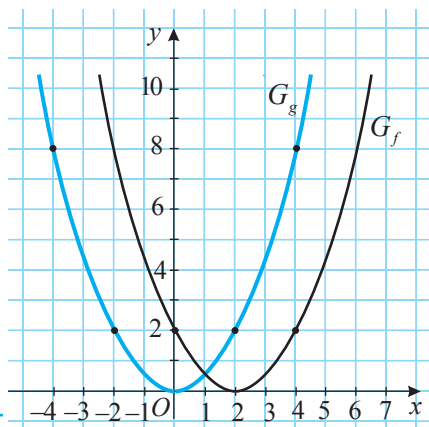


Fig. 24

APLICĂM

• Fie funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Trasați graficul funcției $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2$.

Rezolvare:

Alcătuim tabelul de valori al funcțiilor g și h :

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$g(x) = \frac{1}{2}x^2$	18	12,5	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5
$h(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2$	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5	18	24,5	32

Grafecele funcțiilor g și h sînt reprezentate în figura 25.

Observăm că la translația fiecărui punct al graficului G_g cu 3 unități liniare în stînga de-a lungul axei Ox obținem punctul respectiv al graficului G_h . Astfel, graficul funcției h se obține din graficul funcției g efectuînd translația cu 3 unități liniare de-a lungul axei Ox , în sensul opus acesteia.

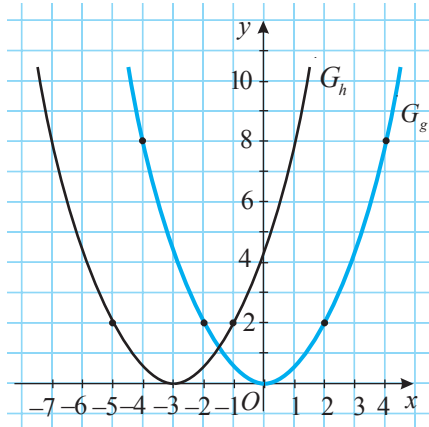


Fig. 25

GENERALIZĂM

Graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a(x-m)^2$, $a \neq 0$, $m \in \mathbb{R}^*$, este o parabolă care se obține din graficul funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = ax^2$, $a \neq 0$, efectuînd translația de-a lungul axei Ox cu m unități liniare în sensul acesteia, dacă $m > 0$, sau cu $-m$ unități liniare în sensul opus acesteia, dacă $m < 0$.

Exercițiu

Trasați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:

- a) $f(x) = -2x^2, g(x) = -2x^2 + 1, h(x) = -2x^2 - 3;$
- b) $f(x) = -2x^2, g(x) = -2(x-1)^2, h(x) = -2(x+2)^2.$

3.4. Studiul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$



INVESTIGĂM

- Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - x - 6.$
 - a) Schițați graficul funcției $f.$
 - b) Determinați proprietățile funcției $f.$

Rezolvare:

a) 1. Aflăm punctele de intersecție a graficului G_f cu axa Ox :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1,5 \text{ sau } x = 2.$$

Deci, punctele de intersecție a graficului G_f cu axa Ox sînt $A(-1,5; 0)$ și $B(2; 0).$

2. Aflăm punctul de intersecție a graficului G_f cu axa Oy : $f(0) = 2 \cdot 0^2 - 0 - 6 = -6.$
Prin urmare, $C(0, -6)$ este punctul de intersecție a graficului G_f cu axa $Oy.$

3. Determinăm axa de simetrie pentru graficul G_f :

$f\left(x + \frac{1}{4}\right) = f\left(-x + \frac{1}{4}\right)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, ceea ce demonstrează că dacă punctul $E\left(x + \frac{1}{4}, y\right) \in G_f$, atunci și punctul $E'\left(-x + \frac{1}{4}, y\right) \in G_f$, adică dreapta de ecuație $x = \frac{1}{4}$ este axă de simetrie pentru graficul G_f (fig. 26).

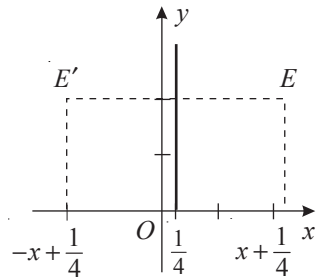


Fig. 26

4. Aflăm coordonatele vârfului parabolei.

Cum $x = \frac{1}{4}$ este axă de simetrie pentru G_f , rezultă că abscisa vârfului parabolei G_f este $x_0 = \frac{1}{4}$, iar ordonata lui este $y_0 = f(x_0) = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6 = -\frac{49}{8}.$

Prin urmare, punctul $V\left(\frac{1}{4}, -\frac{49}{8}\right)$ este vârful parabolei $G_f.$

5. Completăm tabelul de valori al funcției f pentru abscisele punctelor de intersecție a graficului G_f cu axele Ox, Oy și, eventual, pentru alte valori ale lui x :

x	-2	-1,5	0	$\frac{1}{4}$	2	3
$f(x) = 2x^2 - x - 6$	4	0	-6	$-\frac{49}{8}$	0	9

6. Trasăm „prin puncte” graficul G_f și obținem o parabolă cu ramurile în sus (fig. 27).

b) Utilizăm graficul G_f și determinăm proprietățile funcției f :

- 1° f are două zerouri: $x_1 = \text{■}$,
 $x_2 = \text{■}$.
- 2° $f > 0$ pentru $x \in \text{■}$ și $f < 0$ pentru $x \in \text{■}$.
- 3° f este strict descrescătoare pe ■ și strict crescătoare pe ■ .
- 4° $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(\text{■}) = \text{■}$ și punctul $x = \text{■}$ este punct de ■ al funcției f .

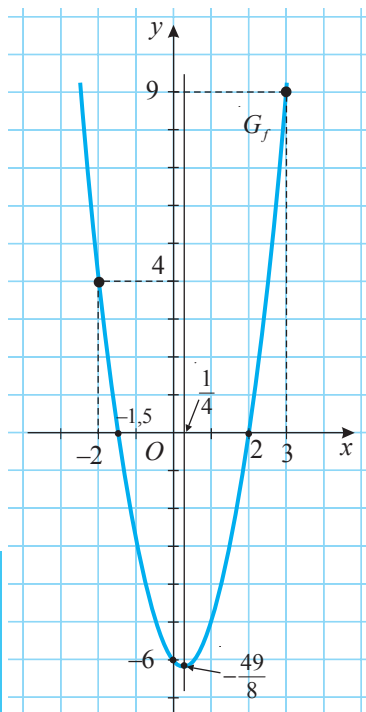


Fig. 27

Definiție

Funcția de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se numește **funcție de gradul II**.

Cum numărul real a este nenul, putem scrie:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \text{ sau}$$

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} = a \left[x - \left(-\frac{b}{2a} \right) \right]^2 + \frac{-\Delta}{4a} \tag{1}$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, unde $\Delta = b^2 - 4ac$ este discriminantul ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, asociată funcției f . Egalitatea (1) se numește **forma canonică a funcției f** .

Din (1) rezultă că, pentru a obține reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, din reprezentarea grafică a funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = ax^2$, $a \in \mathbb{R}^*$, se efectuează două translații ale graficului G_g :

- 1) de-a lungul axei Ox cu $-\frac{b}{2a}$ unități liniare (în sensul axei Ox , dacă $-\frac{b}{2a} > 0$, și în sensul opus axei, dacă $-\frac{b}{2a} < 0$);
- 2) de-a lungul axei Oy cu $-\frac{\Delta}{4a}$ unități liniare (în sensul axei Oy , dacă $-\frac{\Delta}{4a} > 0$, și în sensul opus axei, dacă $-\frac{\Delta}{4a} < 0$).

Exercițiu. Fie funcția: a) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - x - 2$; b) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 1 - x^2$.

1. Trasați: a) graficul funcției g ; b) graficul funcției h .
2. Determinați: a) proprietățile funcției g ; b) proprietățile funcției h .

Rețineți!

Abscisa x_0 a vârfului parabolei G_f este $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Pentru a calcula ordonata y_0 a vârfului parabolei G_f , aflăm $y_0 = f(x_0)$.

3.4.1. Mulțimea valorilor funcției de gradul II

Cînd x parcurge mulțimea \mathbb{R} , $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ parcurge $[0, +\infty)$, iar $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ parcurge:

- a) $[0, +\infty)$, dacă $a > 0$; b) $(-\infty, 0]$, dacă $a < 0$.

Prin urmare, din (1) și din a), b) rezultă că:

- 1) $E(f) = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$, dacă $a > 0$; 2) $E(f) = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$, dacă $a < 0$.

APLICĂM

• Fie funcția:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 7x + 12$; b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$.

Aflați $E(f)$.

Rezolvare:

- a) $f(x) = x^2 - 7x + 12 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$. Cum $a = 1 > 0$, obținem $E(f) = \left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

- b) $f(x) = -3x^2 - 2x + 1 = \square$. Deoarece $a = -3 < 0$, rezultă că $E(f) = \square$.

Exercițiu. Fie funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2 - x - x^2$. Aflați $E(g)$.

3.4.2. Extremele funcției de gradul II

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, și forma ei canonică

$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$, unde $\Delta = b^2 - 4ac$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

1) Cazul $a > 0$

Cum $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ și $a > 0$, rezultă că și $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$.

Atunci $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a}$. Deci, $f(x) \geq -\frac{\Delta}{4a}$ (2) pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Evident, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ numai pentru $x = -\frac{b}{2a}$.

Atunci $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$ (3).

Prin urmare, din (2) și (3) rezultă că $f(x) \geq f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ (4) pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Din (2) și (4) rezultă că $\min_{x \in \mathbb{R}} f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$ și

$x_0 = -\frac{b}{2a}$ este punct de minim al funcției f (fig. 28).

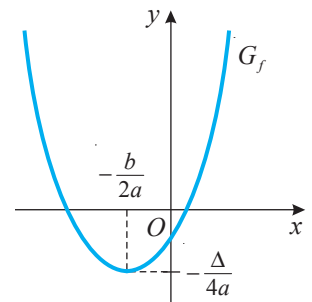


Fig. 28

2) Cazul $a < 0$

Cum $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ și $a < 0$, rezultă că $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$.

Atunci $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} \leq \frac{-\Delta}{4a}$. Deci, $f(x) \leq \frac{-\Delta}{4a}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Ținând cont de (3), obținem $f(x) \leq f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ (5) pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Din (5) rezultă că $\max_{x \in \mathbb{R}} f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$ și $x_0 = -\frac{b}{2a}$ este punct de maxim pentru funcția f (fig. 29).

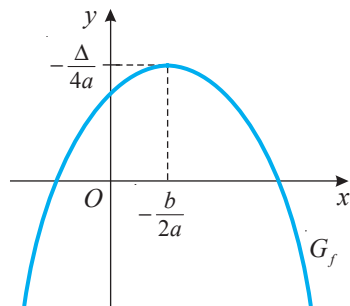


Fig. 29

APLICĂM

• Fie funcțiile:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 7x + 12$; b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -3x^2 - 2x + 1$.

Aflați punctele de extrem și extremele funcțiilor f și g .

Rezolvare:

a) Cum $a = 1 > 0$, obținem $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-7}{2} = 3,5$ – punct de minim al funcției f și $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(3,5) = -\frac{1}{4}$.

b) Deoarece $a = -3 < 0$, avem $x_0 = \text{■} = \text{■} = \text{■}$ – punct de ■ al funcției g și $\max_{x \in \mathbb{R}} g(x) = g(\text{■}) = \text{■}$.

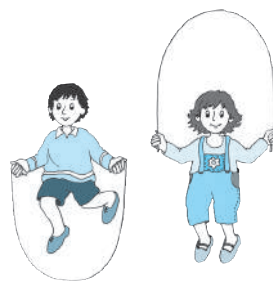
Exercițiu. Fie funcția $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 4 - x^2$. Aflați punctele de extrem și extremele funcției h .

3.4.3. Intervalele de monotonie ale funcției de gradul II

GENERALIZĂM

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, o funcție de gradul II.

- Dacă $a > 0$, funcția f este strict descrescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ și strict crescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ (fig. 28).
- Dacă $a < 0$, funcția f este strict crescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ și strict descrescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ (fig. 29).
- Intervalele $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ și $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ se numesc **intervale de monotonie ale funcției f** .



APLICĂM

- Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: a) $f(x) = 3x^2 + x - 8$; b) $f(x) = -0,3x^2 - 6x + 3$.

Determinați intervalele de monotonie ale funcției f .

Rezolvare:

a) Cum $a = 3 > 0$ și $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{3 \cdot 2} = -\frac{1}{6}$, rezultă că funcția f este strict descrescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{1}{6}\right]$ și strict crescătoare pe $\left[-\frac{1}{6}, +\infty\right)$.

b) Deoarece $a = -0,3 < 0$ și $-\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2(-0,3)} = -10$, rezultă că funcția f este strict crescătoare pe $(-\infty, -10]$ și strict descrescătoare pe $[-10, +\infty)$.

Exercițiu. Fie funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x^2 - x$. Determinați intervalele de monotonie ale funcției g .

3.4.4. Zerourile funcției de gradul II

- Fie funcțiile: a) $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2 - 9x + 18$;
 b) $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = 4x^2 - 4x + 1$;
 c) $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_3(x) = -x^2 + x - 1$.

Aflați zerourile funcțiilor f_1 , f_2 , f_3 .

Rezolvare:

a) $f_1(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3, x_2 = 6$. Prin urmare, funcția f_1 are două zerouri: $x_1 = 3, x_2 = 6$ (fig. 30 a)).

b) $f_2(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0,5$.
 Deci, funcția f_2 are un zero: $x = 0,5$ (fig. 30 b)).

c) $f_3(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + x - 1 = 0$.

Această ecuație nu are soluții reale. (Argumentați!)

Astfel, funcția f_3 nu are zerouri (fig. 30 c)).

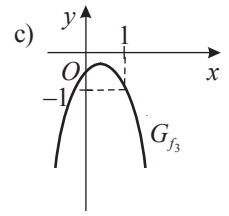
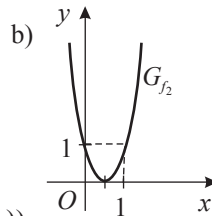
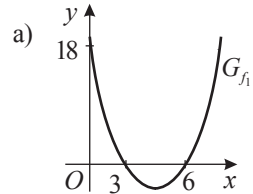


Fig. 30

GENERALIZĂM

Zerourile funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, sînt soluțiile reale ale ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, asociată funcției f .

Numărul de soluții reale ale ecuației de gradul II depinde de valoarea discriminantului ei $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Dacă $\Delta > 0$, ecuația de gradul II are două soluții reale, iar funcția f – două zerouri:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Prin urmare, graficul G_f intersectează axa Ox în două puncte: $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$.

- Dacă $\Delta = 0$, ecuația de gradul II are o soluție reală, iar funcția f – un zero: $x = -\frac{b}{2a}$.

Deci, graficul G_f are un punct comun cu axa Ox , punctul $\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$.

- Dacă $\Delta < 0$, ecuația de gradul II nu are soluții reale. Deci, funcția f nu are zerouri. Prin urmare, graficul G_f nu intersectează axa Ox .

Exercițiu. Fie: a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x - 10$; b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2x$.

Aflați zerourile funcțiilor f și g .

3.4.5. Semnul funcției de gradul II



INVESTIGĂM

• Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Determinați mulțimea valorilor lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

Rezolvare:

Semnul funcției f depinde de semnul discriminantului Δ al ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, asociată funcției f .

Scriem funcția f sub forma canonică: $f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right]$.

1) Cazul $\Delta < 0$

Semnul valorilor funcției f coincide cu semnul numărului a , pentru orice $x \in \mathbb{R}$ (fig. 31).

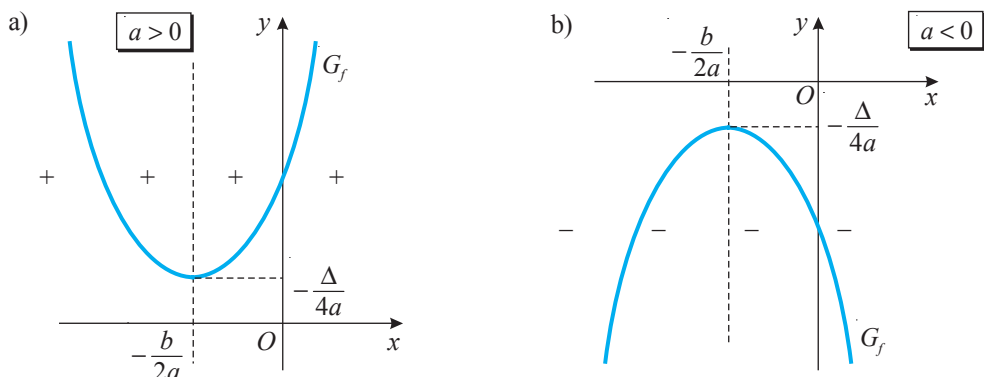


Fig. 31

2) Cazul $\Delta = 0$

Semnul valorilor funcției $f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ coincide cu semnul numărului a , pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$ (fig. 32).

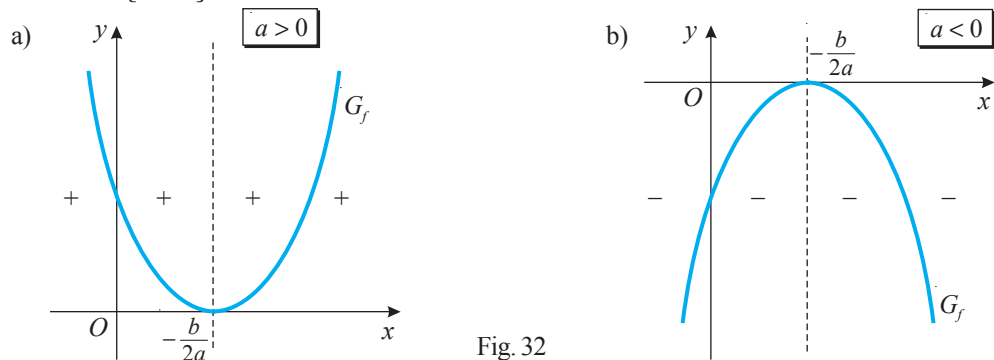


Fig. 32

3) Cazul $\Delta > 0$

Semnul valorilor funcției f , cu zerourile $x_1 < x_2$, coincide cu semnul numărului a , pentru orice $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, și este opus semnului lui a , pentru orice $x \in (x_1, x_2)$ (fig. 33).

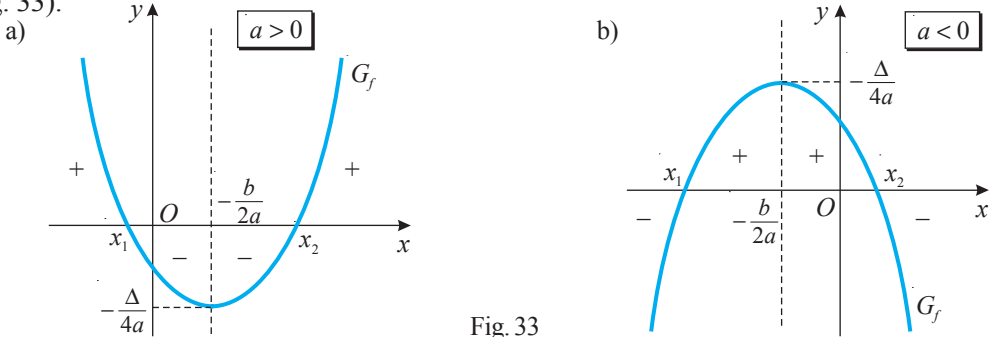


Fig. 33

Observație. Afît semnul funcției de gradul II, cît și intervalele ei de monotonie pot fi identificate mai simplu folosind reprezentarea grafică a acesteia.

Exercițiu. Fie: a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - x - 2$; b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x^2 + 2x - 3$. Aflați semnele funcțiilor f și g .

3.4.6. Graficul funcției de gradul II



INVESTIGĂM

Pentru a trasa graficul funcției de gradul II, procedăm astfel:

- ① Determinăm coordonatele punctelor de intersecție a graficului G_f :
 - a) cu axa Ox : rezolvăm ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, asociată funcției f ; soluțiile ecuației sînt zerourile funcției f ;
 - b) cu axa Oy : calculăm $f(0)$.
- ② Aflăm coordonatele vîrfului parabolei: $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$; punem în evidență axa de simetrie $x = -\frac{b}{2a}$ a parabolei.
- ③ Completăm tabelul, numit **tabelul de variație** al funcției f . Tabelul include abscisele punctelor de intersecție a graficului G_f cu axele Ox și Oy (dacă există), abscisa vîrfului parabolei și, eventual, alte valori ale lui x .
- ④ Completînd tabelul de variație, putem stabili monotonia funcției, punctele de extrem, extremele ei, precum și comportamentul graficului G_f la $-\infty$, la $+\infty$.
- ⑤ Trasăm graficul funcției.

Observație. Cu \searrow vom nota funcția descrescătoare, iar cu \nearrow – funcția crescătoare.

APLICĂM

• Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

a) Trasați graficul funcției f . b) Precizați monotonia, semnul și extremele funcției f .

Rezolvare:

a) ① Determinăm coordonatele punctelor de intersecție a graficului G_f cu axa Ox : rezolvăm ecuația $x^2 - 2x + 3 = 0$, asociată funcției f ; cum $\Delta = -8 < 0$, rezultă că graficul G_f nu intersectează axa Ox .

Determinăm coordonatele punctului de intersecție a graficului G_f cu axa Oy : $f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 3 = 3$; prin urmare, graficul G_f intersectează axa Oy în punctul $(0, 3)$.

② Aflăm coordonatele vârfului parabolei: $x_0 = -\frac{b}{2a} = 1$, $y_0 = f(x_0) = 2$.

Așadar, punctul $V(1, 2)$ este vârful parabolei. Prin urmare, dreapta de ecuație $x = -\frac{b}{2a} = 1$ este axa de simetrie a graficului G_f .

③–④ Completăm tabelul de variație al funcției f :

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$f(x) = x^2 - 2x + 3$	$+\infty$	6	3	2	3	6	$+\infty$
Concluzie			min				

⑤ Trasăm graficul funcției f – parabola G_f (fig. 34).

b) Funcția f ia valori pozitive pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Funcția f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 1]$ și strict crescătoare pe $[1, +\infty)$.

Punctul $x = 1$ este punct de minim pentru funcția f și $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(1) = 2$.

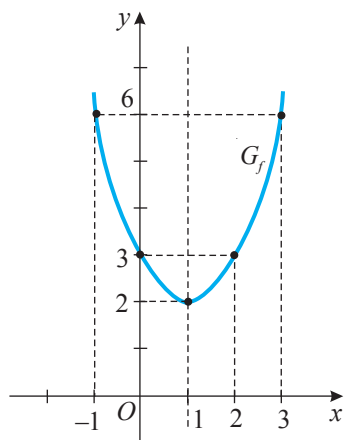


Fig. 34

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Aflați:

a) valorile lui x pentru care $f(x)$ este: 36; -4 ; 0,25; 100; 7; $-1,6$;

b) valorile lui f , știind că x este: 1,4; $-0,2$; -3 ; 0,4; 2; $\sqrt{5}$; 7; (2) ; $-4\sqrt{3}$.

2. Fie punctele:

a) $A(2; -2)$; b) $B(1; 2)$; c) $C(-1; 0,5)$; d) $D(1; -0,5)$; e) $E(0,5; 0,5)$.

Determinați care dintre aceste puncte aparțin graficului funcției:

1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2$; 2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -0,5x^2$; 3) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0,5x^2$.

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 3x^2$; b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2$; c) $f(x) = -1,5x^2$; d) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$.

1) Trasați graficul funcției f .

2) Determinați proprietățile funcției f .

4. a) Construiți o funcție care arată dependența ariei suprafeței totale a cubului de lungimea muchiei lui.
 b) Reprezentați graficul acestei funcții.
 c) Aflați:
 1) aria totală a cubului, știind că lungimea muchiei lui este de: 0,5 cm; 1,2 dm; 3 m.
 2) lungimea muchiei cubului, știind că aria suprafeței totale a lui este de:
 16 cm²; 8√3 dm²; 4 m².
5. Completați cu numere reale, astfel încât punctul $A(\blacksquare, \blacksquare)$ să aparțină graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
- | | | |
|---------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| a) $f(x) = x^2$; | b) $f(x) = -x^2$; | c) $f(x) = 3x^2$; |
| d) $f(x) = -2,5x^2$; | e) $f(x) = 3x(x-2)$; | f) $f(x) = -0,5x(x+1)$; |
| g) $f(x) = x^2 - x - 2$; | h) $f(x) = -3x^2 + x + 1$; | i) $f(x) = x^2 + 3x + 5$. |
6. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2,3x^2$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -4x^2$, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{3}{4}x^2$.
 Precizați: a) extremele; b) monotonia; c) semnele funcțiilor.
7. Aflați zerourile funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
- a) $f(x) = 16x^2 - 4$; b) $f(x) = 6x^2 + 3$; c) $f(x) = x^2 - 8x + 12$; d) $f(x) = 2x^2 - 3x + 8$.
8. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
- | | | |
|------------------------------|------------------------------|---------------------------|
| a) $f(x) = x^2 - 7x + 12$; | b) $f(x) = 3x^2 - 2x - 5$; | c) $f(x) = x^2 - x + 4$; |
| d) $f(x) = -x^2 + 7x - 12$; | e) $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$. | |
- 1) Trasați graficul funcției f .
 2) Determinați axa de simetrie a graficului și proprietățile funcției f .

Formăm capacitățile și aplicăm

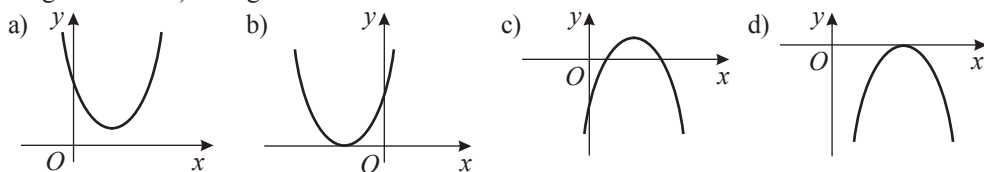
9. Trasați graficul și determinați proprietățile funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
- | | | |
|-------------------------|----------------------------|----------------------------|
| a) $f(x) = x^2 + 3$; | b) $f(x) = 2x^2 - 1$; | c) $f(x) = 3(x+2)^2$; |
| d) $f(x) = -2(x-1)^2$; | e) $f(x) = 4(x+2)^2 - 6$; | f) $f(x) = -(x-3)^2 + 2$. |
10. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
- | | | |
|-------------------------|----------------------------|----------------------------|
| a) $f(x) = 4,7x^2$; | b) $f(x) = -3x^2 + 2$; | c) $f(x) = 4(x-1)^2$; |
| d) $f(x) = -2(x+3)^2$; | e) $f(x) = x^2 - 5x + 6$; | f) $f(x) = 3(x-4)^2 + 5$. |
- Aflați mulțimea valorilor $E(f)$.
11. Reprezentați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor:
- a) $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2$, $g(x) = 3x^2 + 2$, $h(x) = 3x^2 - 4$;
 b) $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2$, $g(x) = -2(x+1)^2 + 3$, $h(x) = -2(x-3)^2 - 4$.
 Ce ați observat?

12. Fie tabelul de variație al funcției f :

x	$-\infty$	-1	0	2	$3,5$	5	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$	$+\infty$	18	10	0	-2,25	0	$+\infty$
Concluzie	↘			min		↗	

Trasați graficul funcției f .

13. Fie graficul funcției de gradul II:



Aflați semnul coeficientului a și al discriminantului Δ ai ecuației asociate funcției respective.

14. Completați cu unul din semnele „<”, „>”, „=”, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

1) Dacă graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, reprezintă o parabolă cu ramurile în jos și vârful ei este situat pe axa Ox , atunci a 0, Δ 0.

2) Dacă graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, reprezintă o parabolă cu ramurile în sus și vârful ei este situat pe axa Oy , atunci a 0, Δ 0.

15. Fie h înălțimea (în metri) la care se află o minge aruncată în sus, t – timpul (în secunde) în care mingea s-a aflat în zbor. Dependența variabilei h de variabila t se exprimă prin formula:

$$h = 24t - 4,9t^2.$$

a) Care este înălțimea maximă la care ajunge mingea?

b) În cât timp mingea se va ridica în zbor și în cât timp va coborî?

c) Peste câte secunde, după ce a fost aruncată în sus, mingea va cădea pe pământ?

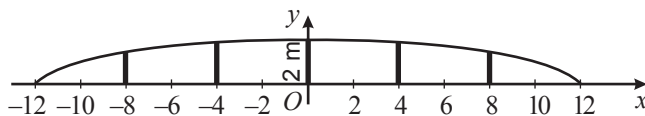
16. Balustrada unui pod are forma unui arc de parabolă.

Înălțimea balustradei este de 2 m, iar

lungimea coardei care o subîn-

tinde – de 24 m. Balustrada are 5 stâlpi verticali, fixați în punctele care împart coarda în părți de

aceeași lungime. Aflați lungimile acestor stâlpi.



17. Trasați graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = (x + 2)(x - 4)$;

b) $f(x) = -6x(x + 1)$;

c) $f(x) = -2(x - 3)(5 - x)$;

d) $f(x) = 5(x - 1)(x - 3)$;

e) $f(x) = -(x - 3)(x - 4)$;

f) $f(x) = 4x(x - 2)$.

18. Parabola 1) $y = 3x^2$; 2) $y = -0,5x^2$ a fost deplasată cu 2 unități de-a lungul axei Ox și cu 3 unități de-a lungul axei Oy .

a) Determinați funcția g al cărei grafic este parabola obținută în urma acestor transformări. Câte funcții pot fi determinate?

b) Reprezentați graficul G_g pentru fiecare funcție obținută.

19. Lungimea laturii AC a triunghiului ABC este a , iar înălțimea corespunzătoare acesteia – h . Prin punctul D al înălțimii BM este dusă o dreaptă paralelă cu AC . Exprimați ariile figurilor obținute ca funcții de variabila x , unde $x = BD$.

20. Determinați, utilizând graficele, apoi în mod analitic, punctele de intersecție a graficelor funcțiilor:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 - x + 4$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x + 2$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^2$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + 3$.

21. Determinați legitatea și scrieți numărul omis:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x - 10$	<input style="width: 30px; height: 20px;" type="text" value="7"/>
$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x^2 + x - 3$	<input style="border: 1px solid black;" type="text" value="?"/>

■ ■ ■ Dezvoltăm capacitățile și creăm

22. Aflați valorile parametrului real a pentru care are zerourile funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$:
- a) $f(x) = ax^2 + 7$; b) $f(x) = ax^2 - 4$; c) $f(x) = x^2 + a$; d) $f(x) = 2x^2 - a$.
23. Aflați valorile coeficienților b și c , astfel încât parabola $y = x^2 + bx + c$ să aibă vârful în punctul $V(-3, 6)$.
24. Determinați funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, al cărei grafic trece prin punctele $A(-2, 0)$, $B(1, 6)$ și care are valoarea maximă 6.
25. Formulați și rezolvați exerciții asemănătoare cu exercițiile 13, 15, 16, 18, 21, 23.
26. Trasați graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin:
- a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9, & \text{dacă } x \geq 3 \\ 3 - x, & \text{dacă } x < 3; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & \text{dacă } x > 0 \\ x - 2, & \text{dacă } x \leq 0. \end{cases}$

• **Problemă pentru campioni**

27. Trasați graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin:

- a) $f(x) = x^2 - 6|x| - 7$; b) $f(x) = x^2 - 5|x + 4| - 26$; c) $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$.

§ 4. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$



INVESTIGĂM

• Fie cubul cu muchia a . Construiți o funcție care să descrie dependența volumului cubului de lungimea muchiei sale.

Rezolvare:

Volumul cubului se calculează aplicînd formula $V = a^3$. Prin urmare, dependența volumului cubului de lungimea muchiei sale este descrisă de funcția $g: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $g(x) = x^3$.

Această funcție ne conduce la funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.

• Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.

- a) Trasați graficul funcției f .
b) Stabiliți proprietățile funcției f .

Rezolvare:

a) Completăm tabelul de valori al funcției f pentru valoarea zero, unele valori pozitive și negative ale lui x :

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3$	8	1	0	1	8

Graficul trasat „prin puncte” este reprezentat în figura 35.

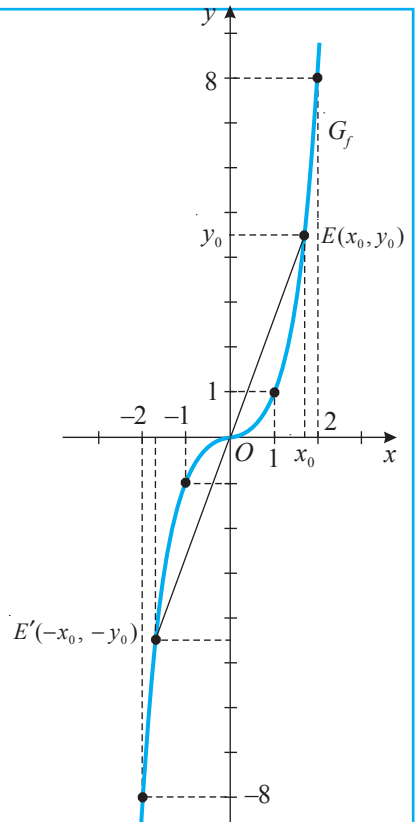


Fig. 35

b) **Proprietăți ale funcției** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$

1° $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Prin urmare, $x = 0$ este zeroul funcției f .

2° Funcția f este strict crescătoare pe \mathbb{R} .

3° Funcția f ia valori negative pentru $x \in (-\infty, 0)$ și valori pozitive pentru $x \in (0, +\infty)$.

4° Cum $f(-x) = -f(x)$, rezultă că dacă punctul $E(x_0, y_0) \in G_f$, atunci și punctul $E'(-x_0, -y_0) \in G_f$. Deci, graficul G_f este simetric față de originea $O(0, 0)$ (fig. 35).

Graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, se numește **parabolă cubică**.

5° Funcția f nu are extreme.

APLICĂM

• Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Aflați valorile lui x pentru care $f(x)$ este:

- a) -64 ; b) $\frac{27}{8}$; c) 125 .

Rezolvare:

- a) $x^3 = -64 \Leftrightarrow x = -4$; b) $x^3 = \frac{27}{8} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$; c) $x^3 = 125 \Leftrightarrow x = 5$.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Fie punctele:

- a) $A(-2, 8)$; b) $B(3, 27)$; c) $C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right)$; d) $D(0, 1)$; e) $E(-\sqrt{3}, -3\sqrt{3})$.

Determinați care din aceste puncte aparțin graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Aflați:

a) valorile lui x pentru care $f(x)$ este: 125 ; -64 ; -16 ; $3,375$; -1 ; $0,001$.

b) valorile lui f , știind că x este: -343 ; $0,2$; $-\frac{2}{5}$; $1,3$; $2\sqrt{2}$; 10 ; $2, (5)$.

Formăm capacitățile și aplicăm

3. Rezolvați în \mathbb{R} , prin metoda grafică, ecuația:

- a) $x^3 = x - 1$; b) $x^3 = -2x$; c) $x^3 = 3x + 2$; d) $x^3 = 3 - x$.

4. 1) Reprezentați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x^3$;
b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 + 1$.

2) Aflați semnele funcțiilor f și g .

3) Aflați extremele funcțiilor f și g .

Dezvoltăm capacitățile și creăm

5. Aflați extremele funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin:

- a) $f(x) = x^3 - 2$; b) $f(x) = (x + 2)^3$; c) $f(x) = 2(x - 8)^2 + 1$; d) $f(x) = -5x + 1$.

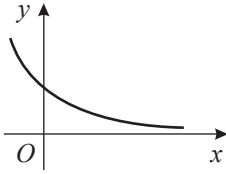
6. Trasați graficul și precizați monotonia funcției: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x^3, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0. \end{cases}$

7. Reprezentați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|^3$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |x^3|$.

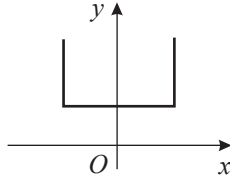
Exerciții și probleme recapitulative

■ Fixăm cunoștințele

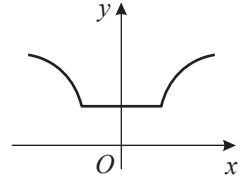
1. Determinați care dintre următoarele linii nu este graficul unei funcții:



a)



b)



c)

Argumentați!

2. Fie funcția:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3 - 2x;$

b) $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = \sqrt{x};$

c) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, f(x) = -\frac{2}{x};$

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2;$

e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x + 1;$

f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3.$

Precizați care dintre următoarele puncte aparțin graficului G_f :

1) $A(-1, 1);$

2) $B(1, 1);$

3) $C(0, 1);$

4) $O(0, 0);$

5) $D(1, -2);$

6) $E(0, 3);$

7) $F(4, 2);$

8) $M(-2, 1).$

3. Recunoașteți funcția de gradul II:

a) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, f(x) = -\frac{5}{x^2};$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}, f(x) = 7 - x^2;$

c) $f: \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -1,6x^2;$

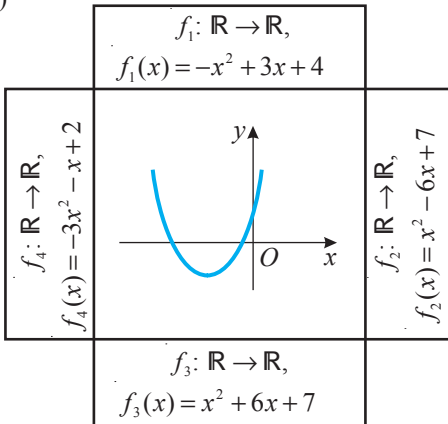
d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^3 + x^2 - 4;$

e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 2x - 1;$

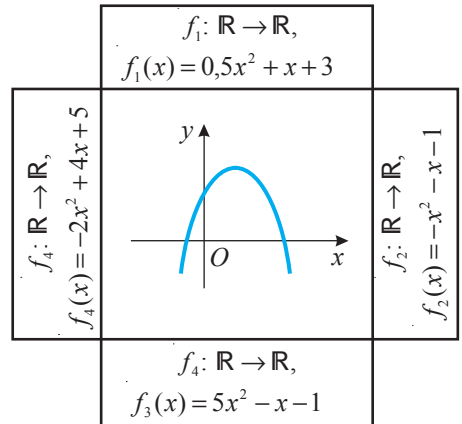
f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x^3.$

4. Determinați graficul cărei funcții este schițat:

a)



b)



Formăm capacitățile și aplicăm

5. Fie mulțimea $P = \{a, b, c, d\}$. Construiți prin diagrame toate funcțiile definite pe mulțimea P cu valori în P .
6. Scrieți o formulă care să exprime dependența lungimii cercului de raza lui. Este această dependență o proporționalitate directă?
7. Mariana avea 15 lei. După ce a procurat x timbre la prețul de 0,5 lei, i-au rămas y lei.
 a) Exprimați printr-o formulă dependența lui y de x .
 b) Aflați domeniul de definiție al funcției obținute.
8. Trasați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -1,5x + b$, pentru $b \in \{-2, 0, 2, 5\}$.
 Ce ați observat?
9. Trasați graficul și determinați proprietățile funcției $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, dacă:
 a) $f(x) = -\frac{4}{x}$; b) $f(x) = \frac{1}{2x}$; c) $f(x) = \frac{7}{x}$; d) $f(x) = -\frac{1}{5x}$.
10. Rezolvați în \mathbb{R} , prin metoda grafică, ecuația:
 a) $\sqrt{x} = 3x - 2$; b) $\frac{25}{x} = x$; c) $\frac{1}{2x} = 2x$; d) $3x^2 = 5x - 2$.
11. Trasați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + n$, pentru $n \in \{-1, 0, 1, 3\}$.
 Ce ați observat?
12. Reprezentați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2(x - m)^2$, pentru $m \in \{-1, 0, 1, 3\}$.
 Ce ați observat?
13. Apa dintr-un ceainic electric, la un moment dat, avea temperatura de 10°C . În continuare, peste fiecare minut, temperatura apei creștea cu 4°C , astfel încât a atins valoarea de 100°C . Exprimați printr-o formulă dependența temperaturii apei y (în grade Celsius) de timpul încălzirii t (în minute). Schițați graficul acestei dependențe. Utilizând graficul, aflați:
 a) temperatura apei peste:
 1) 5 minute; 2) 10 minute;
 3) 15 minute; 4) 20 de minute de la începutul încălzirii.
 b) peste câte minute temperatura apei a atins valoarea de:
 1) 50°C ; 2) 70°C ; 3) 100°C .
14. Trasați graficul și stabiliți proprietățile funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:
 a) $f(x) = 1 - x - x^2$; b) $f(x) = x^2 - 6x + 9$; c) $f(x) = 9x^2 - 6x + 1$; d) $f(x) = 3x^2 + 4x + 2$.
15. Aflați axa de simetrie a graficului și extremele funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
 a) $f(x) = 5x^2 + 3$; b) $f(x) = x^2 - 4$; c) $f(x) = -3(x + 2)^2$; d) $f(x) = 6x^2 - x + 3$.
16. Definiți printr-o formulă funcția de gradul II care este:
 a) strict crescătoare pe $(-\infty, 4]$ și strict descrescătoare pe $[4, +\infty)$;
 b) strict descrescătoare pe $(-\infty, -2]$ și strict crescătoare pe $[-2, +\infty)$.

17. Parabola – graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x^2$, a fost deplasată cu 2 unități de-a lungul axei Oy și cu 3 unități de-a lungul axei Ox .
- Determinați funcția g al cărei grafic este parabola obținută în urma efectuării acestor transformări ale graficului funcției f . Câte funcții g ați determinat?
 - Trasați graficul fiecărei funcții obținute.
 - Determinați proprietățile fiecărei funcții obținute.
18. Aflați coordonatele punctelor de intersecție cu axele Ox și Oy a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
- $f(x) = 2x^2 - x - 15$;
 - $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$.
19. Dați exemple de utilizare a funcțiilor studiate în viața de zi cu zi, în fizică, biologie, chimie, economie etc.

■ ■ ■ Dezvoltăm capacitățile și creăm

20. Definiți printr-o formulă funcția de gradul I care satisface condiția:

- $f(2+x) = -5x + 3$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
- $f(3x-1) = 1-2x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

21. Trasați graficul funcției:

$$a) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2, & \text{dacă } x \leq 1 \\ \sqrt{x}, & \text{dacă } x > 1; \end{cases}$$

$$b) f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, f(x) = \begin{cases} -x^3 + 9, & \text{dacă } x \leq -2 \\ -\frac{2}{x}, & \text{dacă } -2 < x < 2 \\ -0,5x, & \text{dacă } x \geq 2. \end{cases}$$

22. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + bx + c$.

Determinați coeficienții b și c , știind că vârful parabolei G_f este punctul $A(-2, 4)$.

23. Determinați funcția de gradul II al cărei grafic trece prin punctele:

- $A(-3, 0)$, $B(2, 5)$ și care are valoarea maximă 5;
- $A(0, 2)$, $B(-1, 4)$ și care are valoarea minimă 3.

24. Trasați graficul funcției:

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3|x| - 4$;
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |0,2x + 5|$;
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |3x^2 - x - 2|$.

25. Rezolvați în \mathbb{R} , prin metoda grafică, ecuația:

- $x^3 = x^2 + x + 1$;
- $2x = x^3 - 4$.

26. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - x + 1$. Pentru care valori reale ale lui a are loc relația $f(a) = -3f(-a) + 6$?

27. Formulați exerciții asemănătoare cu exercițiile 13, 16, 17, 21, 25 și propuneți-le colegilor.

• Problemă pentru campioni

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + x^3$;

28. Trasați graficul funcției:

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - x^3$.

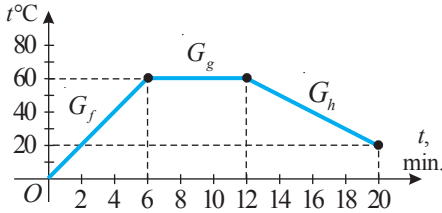
Test sumativ

Timp efectiv de lucru:
45 de minute



Varianta I

1. În desen este reprezentat graficul variației temperaturii apei timp de 20 de minute:



- a) Indicați litera **A** dacă propoziția este adevărată, sau litera **F** dacă ea este falsă: „ G_f este graficul unei funcții crescătoare”.
A F
- b) Aflați cu câte grade a crescut temperatura apei în primele 6 minute. **2 p**
- c) Aflați cu câte grade s-a schimbat temperatura apei în ultimele 8 minute. **2 p**
- d) Aflați perioada în care temperatura apei nu s-a schimbat. **2 p**
- e) Definiți prin formule analitice funcțiile reprezentate prin graficele G_f , G_g și G_h . **7 p**

2. Determinați valorile reale ale lui x pentru care ambele funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -(x-4)^2$, și $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, $g(x) = \frac{4}{x}$, sînt descrescătoare. Argumentați răspunsul. **5 p**

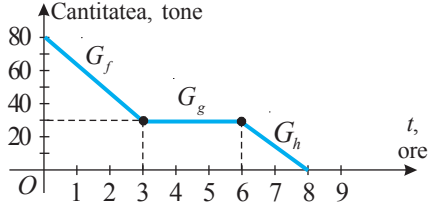
3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 - 5x - 3$.
a) Scrieți în casetă unul dintre semnele „ $<$ ”, „ $=$ ” sau „ $>$ ”, astfel încît să obțineți o propoziție adevărată: „ $f(0)$ $f(-1)$ ”. **3 p**

- b) Trasați graficul G_f . **6 p**
- c) Determinați $E(f)$. **2 p**
- d) Completați casetele:
 $f /$ pentru $x \in$; **2 p**
 $f /$ pentru $x \in$; **2 p**
 $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) =$. **2 p**

- e) Formulați un exemplu din fizică referitor la aplicarea funcției de gradul II. **2 p**

Varianta I

1. În desen este reprezentat graficul de descărcare a grînelor dintr-un depozit timp de 8 ore:



- a) Indicați litera **A** dacă propoziția este adevărată, sau litera **F** dacă ea este falsă: „ G_f este graficul unei funcții crescătoare”.
A F
- b) Aflați cu cît s-a micșorat cantitatea de grîne în primele 3 ore. **2 p**
- c) Aflați cu cît s-a micșorat cantitatea de grîne în ultimele 2 ore. **2 p**
- d) Aflați perioada în care nu s-au efectuat lucrări în depozit. **2 p**
- e) Definiți prin formule analitice funcțiile reprezentate prin graficele G_f , G_g și G_h . **7 p**

2. Determinați valorile reale ale lui x pentru care ambele funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -(x+2)^2$, și $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, $g(x) = -\frac{8}{x}$, sînt crescătoare. Argumentați răspunsul. **5 p**

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$.
a) Scrieți în casetă unul dintre semnele „ $<$ ”, „ $=$ ” sau „ $>$ ”, astfel încît să obțineți o propoziție adevărată: „ $f(-2)$ $f(1)$ ”. **3 p**

- b) Trasați graficul G_f . **6 p**
- c) Determinați $E(f)$. **2 p**
- d) Completați casetele:
 $f /$ pentru $x \in$; **2 p**
 $f /$ pentru $x \in$; **2 p**
 $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) =$. **2 p**

- e) Formulați un exemplu din viața cotidiană privind aplicarea funcției de gradul II. **2 p**

Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	38–37	36–33	32–29	28–23	22–17	16–12	11–8	7–5	4–3	2–0

§ 1. Monoame. Operații cu monoame

1.1. Noțiunea de monom



INVESTIGĂM

• Fie expresiile algebrice:

$$8y; -3x^2 + y; 2\sqrt{ab^3}; \sqrt{7ab}; 6,5x^5y^2z^3; 2010; -9 - 11a^2b; \sqrt{xy}.$$

- Identificați expresiile în care se execută adunări și scăderi.
- Identificați expresiile care nu conțin litere sub radical.
- Identificați expresiile care conțin litere sub radical.
- Identificați expresiile în care nu se execută adunări și scăderi și care nu conțin litere sub radical.

Rezolvare:

- $-3x^2 + y; -9 - 11a^2b$ —————> expresii algebrice raționale;
- $8y; -3x^2 + y; \sqrt{7ab}; 6,5x^5y^2z^3; 2010; -9 - 11a^2b$ —————> expresii algebrice raționale;
- $2\sqrt{ab^3}; \sqrt{xy}$ —————> expresii algebrice iraționale;
- $8y; \sqrt{7ab}; 6,5x^5y^2z^3; 2010$ —————> expresii algebrice raționale.

GENERALIZĂM

- **Expresiile algebrice** conțin numere și litere legate prin operațiile de adunare, scădere, înmulțire, împărțire, ridicare la putere și de extragere a rădăcinii pătrate.
- **Expresiile algebrice raționale** nu conțin litere sub radical.
- Expresiile algebrice care conțin litere sub radical sînt **expresii iraționale**.

Definiție

Expresiile algebrice raționale în care literele sînt factori sau baze ale unor puteri cu exponent natural se numesc **monoame**.



- Un monom este format din **coeficient** și **partea literală**.
- Literele care se folosesc la scrierea monoamelor se numesc **nedeterminate**.
- Nedeterminatele se notează cu litere mari ale alfabetului latin (X, Y, Z, \dots).

$$\left. \begin{array}{l} \boxed{3} X^3 Y; \\ \boxed{-0,2} Z^4; \\ \boxed{\sqrt{2}} XY^3 Z^2. \end{array} \right\} \longrightarrow$$

1.2. Forma canonică (standard) a unui monom



INVESTIGĂM

• Fie monomul $3,4XYX^3YZ^3$.

- Scrieți monomul, astfel încât fiecare nedeterminată să apară o singură dată.
- Aflați gradul monomului în raport cu nedeterminata X .
- Aflați gradul monomului în raport cu toate nedeterminatele.

Rezolvare:

- Aplicând proprietățile puterii, obținem $3,4X^4Y^2Z^3$.
- Deoarece în scriere avem X^4 , gradul monomului în raport cu nedeterminata X este 4.
- Gradul monomului în raport cu toate nedeterminatele este $4 + 2 + 3 = 9$.

- Un monom este scris în **forma canonică** (standard) dacă fiecare nedeterminată a acestuia apare o singură dată și pe primul loc este scris coeficientul.
- **Gradul unui monom în raport cu o nedeterminată** este egal cu exponentul nedeterminatei respective a monomului scris în forma canonică.
- **Gradul unui monom în raport cu toate nedeterminatele** este egal cu suma exponenților nedeterminatelor monomului scris în forma canonică.
- **Gradul monomului care nu conține nedeterminate** (un număr real) se consideră egal cu zero.

1.3. Operații cu monoame

1.3.1. Adunarea monoamelor



INVESTIGĂM

• Efectuați: a) $3X^2Y - 0,5XY + 1,5X^2Y + 2XY - X^3$; b) $8X^2 + 16X - 9X^2 - 10X + 3X^2$.

Rezolvare:

$$\text{a) } \underline{3X^2Y} - \underline{0,5XY} + \underline{1,5X^2Y} + \underline{2XY} - X^3 = 3X^2Y + 1,5X^2Y - (0,5XY - 2XY) - X^3 = \\ = (3 + 1,5)X^2Y - (0,5 - 2)XY - X^3 = 4,5X^2Y + 1,5XY - X^3;$$

$$\text{b) } \underline{8X^2} + \underline{16X} - \underline{9X^2} - \underline{10X} + \underline{3X^2} = (8 - 9 + 3)X^2 + (16 - 10)X = 2X^2 + 6X.$$

- Monoamele care au aceleași nedeterminate la aceleași puteri, indiferent de ordinea în care sînt scrise nedeterminatele, au aceeași parte literală.
- Monoamele care au aceeași parte literală se numesc **monoame asemenea** sau **termeni asemenea**.
- **Reducerea termenilor asemenea** este operația prin care o sumă de monoame asemenea se înlocuiește cu un monom asemenea cu ele. Rezultatul reducerii a două sau mai multe monoame asemenea este un monom asemenea cu ele, care are coeficientul egal cu suma coeficienților termenilor asemenea.
- Se adună sau se scad numai monoamele care au aceeași parte literală.

Exercițiu. Formulați regula de adunare a două sau mai multe monoame.

1.3.2. Înmulțirea monoamelor



INVESTIGĂM

- Efectuați: a) $-3X^2Y \cdot 4XYZ$; b) $5X \cdot \sqrt{2}XY^2$.

Rezolvare:

Utilizând proprietățile puterii, obținem:

a) $-3X^2Y \cdot 4XYZ = (-3 \cdot 4) \cdot (X^2 \cdot X) \cdot (Y \cdot Y) \cdot Z = -12X^3Y^2Z$;

b) $5X \cdot \sqrt{2}XY^2 = (\blacksquare \cdot \blacksquare) \cdot (\bullet \cdot \bullet) \cdot Y^2 = \blacksquare \cdot \bullet \cdot Y^2$.

⇒ **Produsul** a două sau mai multe monoame este un monom.

Exercițiu. Formulați regula de înmulțire a două monoame.

1.3.3. Ridicarea la putere cu exponent natural



INVESTIGĂM

- Efectuați: a) $(2X^3YZ^4)^3$; b) $(-Y^2Z)^{125}$.

Rezolvare:

Aplicând proprietățile puterii, obținem:

a) $(2X^3YZ^4)^3 = 2^3 \cdot (X^3)^3 \cdot Y^3 \cdot (Z^4)^3 = 8X^9Y^3Z^{12}$;

b) $(-Y^2Z)^{125} = (-1)^{125} \cdot \blacksquare \cdot \blacksquare = -\blacksquare \blacksquare$.

⇒ **Puterea cu exponent natural a unui monom** diferit de zero este un monom.

Observații. 1. Dacă exponentul este 0, atunci puterea unui monom diferit de zero este monomul 1.

$$\longrightarrow (5XY^3)^0 = 1.$$

2. Dacă exponentul este 1, atunci puterea unui monom diferit de zero este însuși monomul.

$$\longrightarrow (0,2X^2Y)^1 = 0,2X^2Y.$$

Exercițiu. Formulați regula de ridicare la putere cu exponent natural a unui monom.

1.3.4. Împărțirea monoamelor



INVESTIGĂM

- Efectuați: a) $6X^3Y^2Z : 2X^2YZ$; b) $-4XY : 0,1X$.

Rezolvare:

Utilizând proprietățile puterii, obținem:

a) $6X^3Y^2Z : 2X^2YZ = (6 : 2) \cdot (X^3 : X^2) \cdot (Y^2 : Y) \cdot (Z : Z) = 3 \cdot X \cdot Y \cdot 1 = 3XY$;

b) $-4XY : 0,1X = -(\blacksquare : \blacksquare) \cdot (\blacksquare : \blacksquare) \cdot Y = -\blacksquare \cdot \blacksquare \cdot Y = -\blacksquare Y$.

⇒ • În cazul în care există un unic monom, în forma canonică, care să fie cîțul împărțirii a două monoame, spunem că se poate efectua împărțirea acestor două monoame.

⇒ • Nu putem împărți un monom la monomul 0.

⇒ • Nu are sens nici $\frac{0}{0}$, deoarece există mai multe monoame, în formă canonică.

⇒ De exemplu, X, Y^2, Z^3 , astfel încît $X \cdot 0 = 0, Y^2 \cdot 0 = 0, Z^3 \cdot 0 = 0$.

Exercițiu. Formulați regula de împărțire a două monoame.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

- Determinați care dintre expresii sînt monoame:
 - $2,05, \sqrt{XY}, X, \sqrt{15YZ}, Z^{2010}, \frac{XY}{Z}, X^2 + Y^2;$
 - $-Y^8, 3\sqrt{2XY}, Z, \sqrt{XY}, Z - X^3, \frac{X+Y}{Z}, Y^{2012}.$
- Indicați coeficientul și partea literală a monomului:
 - $-8XY;$
 - $2X^2YZ;$
 - $-\sqrt{3XZ^2};$
 - $7,8Y^4Z^{10}.$
- Scrieți sub forma canonică monomul:
 - $XYXXZ;$
 - $YZYZYZ;$
 - $XYX^2Y^2Z;$
 - $XZYZYZ.$
- Determinați gradul monomului:
 - în raport cu nedeterminata $X;$
 - în raport cu toate nedeterminatele.
 - $X^3YZ;$
 - $-2XZ^5;$
 - $0,1X^2Y;$
 - $\sqrt{3YZ}.$
- Indicați monoamele asemenea:
 - $5XY, 3X^2, -XY, Z^3Y, -0,25X^2, YZ^3, XYZ;$
 - $XY^2, -8,5Y^3, -2Y^2X, 0,8Y^3, X^3Y^3Z^3, XY.$
- Reduceți termenii asemenea:
 - $XY - 3Y^4 + 2,5XY + 8Y^4;$
 - $3Z^2 - 2XY - 0,2Z^2 + 10XY.$
- Efectuați:
 - $-4X^2Y \cdot 3XY^2;$
 - $8,2XZ \cdot 5X^3YZ;$
 - $\sqrt{3YZ} \cdot \sqrt{3XZ^3};$
 - $7\frac{1}{3}X \cdot 2\frac{1}{2}XY.$
- Efectuați:
 - $(3X^5Y^3);$
 - $(-2XYZ^4)^2;$
 - $(\sqrt{2}XY^3)^4;$
 - $(1,5ZY^3)^3.$
- Efectuați:
 - $16X^3Y : (-2XY);$
 - $-6,4Y^2Z^3 : 0,4YZ;$
 - $2\sqrt{3}X^2Z^5 : \sqrt{3XZ^2};$
 - $7\frac{1}{3}X^3Y^3Z^3 : \frac{1}{3}XYZ.$

Formăm capacitățile și aplicăm

- Efectuați:
 - $7,3XY - 8Y^3 + 2(0,5Y^3 + XY) - ZY;$
 - $3\frac{1}{4}ZY + 4\left(\frac{1}{8}ZY - Z^2\right) + 3Z^2 + XY.$
- Efectuați:
 - $3XY \cdot 0,2X^2Y^3Z - (2XY)^3 + (1,2XY)^2 \cdot XY;$
 - $-5ZY \cdot 0,4Z^3YX + (0,1ZY^2)^2 \cdot X^3Y - (-XYZ)^3.$
- Efectuați:
 - $18X^3Y^5 : 0,3XY^4 - (2X^2Y + 4,8X^4Z : 1,6XZ);$
 - $-9XY^3Z^2 : 30Y^2Z - (-7XYZ + 12X^2Z^2 : 0,4XZ^2).$
- Completați cu exponenți, astfel încît gradul monomului în raport cu toate nedeterminatele să fie 10:
 - $3X^{\blacksquare}Y^2Z^{\blacksquare};$
 - $(Y^2Z^3)^{\blacksquare};$
 - $(X^{\blacksquare}Y^{\blacksquare}Z)^3;$
 - $(-\sqrt{5}X^2Y^{\blacksquare}Z^{\blacksquare})^2.$
- Determinați legitatea și scrieți monomul lipsă:

$\sqrt{2}X^2Y^3$	3	$2\sqrt{2}X^6Y^9$
$-\sqrt{3}ZY^5$	2	?

Dezvoltăm capacitățile și creăm

15. a) Gradul monomului X^3YZ este egal cu 6.
 b) Monomul XY^2Z^5 are gradul egal cu 8.
 c) Monoamele XY și X^2Y^2 sînt asemenea.
 d) Monoamele $26X^2Y$ și $-X^2Y$ se pot reduce.
16. Completați șirul monoamelor:
 a) $XYZ, X^2YZ, X^2Y^2Z, \blacksquare$; b) $X^8Y^4Z^2, X^8Y^4, X^8Y^2, \blacksquare$.
17. Completați cu exponenți, astfel încît gradul monomului obținut în raport cu toate nedeterminatele să fie un număr divizibil cu: 1) 3; 2) 5.
 a) $((X^2Y^3)^\blacksquare)^\blacksquare$; b) $((XY^2Z)^\blacksquare)^\blacksquare$.



§ 2. Polinoame. Operații cu polinoame

2.1. Noțiunea de polinom



INVESTIGĂM

- Fie expresiile algebrice raționale: X^2 ; $-X^3 + X$; X^2Y^5 ; $X^5 + X^4 + 2X^3 + X^2 + X + 1$; $ZY + XZ$; $XY - 3X^2Y^2$; $Z^3 + X - 2$; $(XY) \cdot (ZX^2)$; $X^{2016} - X^{2015}$; $(Z^3Y^2) \cdot (7Z)$.
- a) Identificați monoamele.
- b) Identificați produse de monoame.
- c) Identificați sume de monoame.

Definiție

Se numește polinom o sumă algebrică de două sau mai multe monoame.

- Polinoamele pot avea una sau mai multe nedeterminate.
- Polinoamele se notează cu litere mari ale alfabetului latin (P, Q, R, H, \dots).

Exemple

$$P(X) = X^3 - 2X^2 + 5; \quad Q(X, Y) = 3X^2Y - XY + X; \quad R(X, Y, Z) = XYZ - 3.$$

Exercițiu. Identificați și notați polinoamele din secvența **INVESTIGĂM**.

- **Coefficienții polinomului** sînt coeficienții termenilor săi. Polinomul ai cărui coeficienți sînt egali cu 0 se numește **polinomul nul**. Polinomul nul se notează cu 0. Polinomul care nu are nedeterminate se numește **polinom constant**.
- Termenul care nu conține nedeterminată se numește **termen liber**.
- Un polinom cu doi termeni se numește **binom**, iar cu trei termeni – **trinom**.

Observație. În continuare, vom considera, de regulă, polinoame de o nedeterminată.



INVESTIGĂM

- Fie monoamele: $7X \cdot X^3$, $3X^2 \cdot (-5X^3)$, $8X \cdot X \cdot (-X)$, $(X^3)^2$, $-7X$, 5^2 .
- a) Scrieți monoamele în forma canonică.
- b) Stabiliți gradele monoamelor.
- c) Scrieți polinomul $P(X)$ ca sumă a acestor monoame aranjate în ordinea descrescătoare a gradelor lor.
- d) Scrieți polinomul $P(X)$ în forma canonică.
- e) Stabiliți gradul polinomului $P(X)$.
- f) Enumerați coeficienții polinomului $P(X)$ scris în forma canonică.
- g) Determinați termenul liber.

Rezolvare:

- a) $7X^4$, $-15X^5$, $-8X^3$, X^6 , $-7X$, 25 .
- b) 4, 5, 3, 6, 1, 0.
- c) $P(X) = X^6 + (-15X^5) + 7X^4 + (-8X^3) + (-7X) + 25$.
- d) $P(X) = X^6 + (-15)X^5 + 7X^4 + (-8)X^3 + 0X^2 + (-7)X + 25$.
- e) Polinomul $P(X)$ are gradul 6.
- f) 1, -15, 7, -8, 0, -7, 25. g) 25.

Un polinom de o nedeterminată este scris în **forma canonică (standard)** dacă termenii lui se succed în ordinea descrescătoare a gradelor lor. Un polinom are o singură formă canonică.

Polinoamele cu aceeași formă canonică sînt **egale**.

Gradul maxim al monoamelor unui polinom se consideră **gradul polinomului**. Gradul polinomului $P(X)$ se notează **grad $P(X)$** . Pentru polinomul nul gradul nu se definește.

APLICĂM

Pentru polinomul $P(X) = 2X^3 - \sqrt{3}X - 1$ avem:

- a) $P(X) = 2X^3 + 0X^2 + (-\sqrt{3})X + (-1) \longrightarrow$ forma canonică;
- b) grad $P(X) = \blacksquare$;
- c) $\blacksquare \longrightarrow$ termenul liber.

GENERALIZĂM

- Polinoamele de gradul I în X sînt de forma $P(X) = aX + b$, unde a și b sînt numere reale, $a \neq 0$.
- Polinoamele de gradul II în X sînt de forma $P(X) = aX^2 + bX + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
- Polinoamele de gradul III în X sînt de forma $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Forma canonică a unui polinom de o nedeterminată este:

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Termenul $a_n X^n$ se numește **termenul principal** al polinomului $P(X)$, numărul a_n se numește **coeficientul dominant** al polinomului $P(X)$, iar coeficientul a_0 – **termenul liber**.

Observație. Pentru a simplifica scrierea polinoamelor concrete, convenim să nu scriem termenii polinomului care au coeficienții egali cu zero, să notăm termenii de forma $1X^k$ cu X^k , iar expresia de forma $+(-a)X^k$ – cu $-aX^k$. De exemplu, polinomul $X^4 + (-5)X^3 + 1X^2 + 0X + 3$ se scrie $X^4 - 5X^3 + X^2 + 3$.

2.2. Valoarea numerică a polinomului



INVESTIGĂM

• Calculați valoarea numerică a polinomului $P(X, Y) = X^2Y - 2XY$ pentru $X = 1$, $Y = -3$.

Rezolvare:

$$P(1, -3) = 1^2 \cdot (-3) - 2 \cdot 1 \cdot (-3) = 3.$$

• Calculați valoarea numerică a polinomului $Q(X) = 2X^3 - X + 5$ pentru $X = 0$.

Rezolvare:

$$Q(0) = 2 \cdot \blacksquare^3 - \blacksquare + 5 = \blacksquare.$$

Exercițiu. Formulați regula de calcul al valorii numerice a unui polinom.

APLICĂM

Calculați valoarea numerică a polinomului:

a) $P(X, Y, Z) = X^2 - Y^2 + Z^2$ pentru $X = 0$, $Y = 1$, $Z = -1$;

b) $Q(X) = -2X^7 + X^5 - 1$ pentru $X = -1$.

Rezolvare:

a) $P(0, 1, -1) = \blacksquare^2 - \blacksquare^2 + \blacksquare^2 = \blacksquare$;

b) $Q(-1) = -2 \blacksquare^7 + \blacksquare^5 - 1 = \blacksquare$.

2.3. Adunarea și scăderea polinoamelor



INVESTIGĂM

• Fie polinoamele $P(X) = -5X^4 + 3X^3 - \sqrt{2}X + 4$ și $Q(X) = 2X^4 - 7X^3 + X$.

Efectuați: a) $P(X) + Q(X)$; b) $P(X) - Q(X)$; c) $-Q(X)$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X) + Q(X) &= (-5X^4 + 3X^3 - \sqrt{2}X + 4) + (2X^4 - 7X^3 + X) = \\ &= (-5X^4 + 2X^4) + (3X^3 - 7X^3) + (-\sqrt{2}X + X) + 4 = -3X^4 - 4X^3 + (1 - \sqrt{2})X + 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X) - Q(X) &= (-5X^4 + 3X^3 - \sqrt{2}X + 4) - (2X^4 - 7X^3 + X) = \\ &= (-5 - 2)X^4 + (3 + 7)X^3 + (-\sqrt{2} - 1)X + 4 = -7X^4 + 10X^3 - (1 + \sqrt{2})X + 4. \end{aligned}$$

$$\text{c) } -Q(X) = -(2X^4 - 7X^3 + X) = -2X^4 + 7X^3 - X.$$

- La adunarea (scăderea) a două polinoame se adună (se scad) termenii asemenea.
- Polinomul $-P(X)$ este *opusul* polinomului $P(X)$.

Proprietăți ale adunării polinoamelor

1° **Comutativitatea:** $P(X) + Q(X) = Q(X) + P(X)$ pentru orice polinoame $P(X), Q(X)$.

2° **Asociativitatea:** $(P(X) + Q(X)) + R(X) = P(X) + (Q(X) + R(X))$ pentru orice polinoame $P(X), Q(X), R(X)$.

3° Polinomul nul este element neutru la adunarea polinoamelor:

$$P(X) + 0 = P(X) \text{ pentru orice polinom } P(X).$$

4° Orice polinom $P(X)$ are *opusul* său $-P(X)$: $P(X) + (-P(X)) = 0$.

2.4. Înmulțirea polinoamelor



INVESTIGĂM

• Fie polinoamele $P(X) = 3X^2 - X + 1$, $Q(X) = X - 1$.

Efectuați:

a) $-5X^3 \cdot P(X)$; b) $P(X) \cdot Q(X)$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \text{a) } -5X^3 \cdot P(X) &= -5X^3 \cdot (3X^2 - X + 1) = -5X^3 \cdot 3X^2 + (-5X^3) \cdot (-X) + (-5X^3) \cdot 1 = \\ &= (-5 \cdot 3)X^3 \cdot X^2 + [-5 \cdot (-1)] \cdot X^3 \cdot X + (-5 \cdot 1) \cdot X^3 = -15X^5 + 5X^4 - 5X^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X) \cdot Q(X) &= (3X^2 - X + 1)(X - 1) = 3X^2 \cdot (X - 1) - X \cdot (X - 1) + 1(X - 1) = \\ &= 3X^3 - 3X^2 - X^2 + X + X - 1 = 3X^3 - 4X^2 + 2X - 1. \end{aligned}$$

• La înmulțirea unui monom cu un polinom se înmulțește acest monom cu fiecare termen al polinomului dat. Suma produselor obținute este polinomul produs.

• La înmulțirea polinoamelor $P(X)$ și $Q(X)$ se înmulțește fiecare termen al polinomului $P(X)$ cu fiecare termen al polinomului $Q(X)$. Suma produselor obținute reprezintă polinomul produs ($P(X) \cdot Q(X)$).

• $\text{grad}(P(X) \cdot Q(X)) = \text{grad } P(X) + \text{grad } Q(X)$.

Proprietăți ale înmulțirii polinoamelor

- 1° **Comutativitatea:** $P(X) \cdot Q(X) = Q(X) \cdot P(X)$ pentru orice polinoame $P(X)$, $Q(X)$.
- 2° **Asociativitatea:** $(P(X) \cdot Q(X)) \cdot R(X) = P(X) \cdot (Q(X) \cdot R(X))$ pentru orice polinoame $P(X)$, $Q(X)$, $R(X)$.
- 3° Produsul oricărui polinom cu **polinomul nul** este polinomul nul: $P(X) \cdot 0 = 0$ pentru orice polinom $P(X)$.
- 4° Polinomul 1 este **element neutru** la înmulțirea polinoamelor: $P(X) \cdot 1 = 1 \cdot P(X)$ pentru orice polinom $P(X)$.
- 5° Înmulțirea polinoamelor este **distributivă față de adunare (scădere)**:
 $P(X)(Q(X) \pm R(X)) = P(X) \cdot Q(X) \pm P(X) \cdot R(X)$ pentru orice polinoame $P(X)$, $Q(X)$, $R(X)$.

APLICĂM

Fie polinoamele $P(X) = X^3 + 1$, $Q(X) = -2X^7$, $R(X) = X^4 - 1$.

Efectuați, scriind polinomul obținut în formă canonică:

- a) $P(X) \cdot (Q(X) - R(X))$;
- b) $P(X) \cdot Q(X) - P(X) \cdot R(X)$.

Comparați rezultatele obținute.

Rezolvare:

$$\text{a) } P(X) \cdot (Q(X) - R(X)) = (X^3 + 1)(-2X^7 - X^4 + 1) = X^3 \cdot \blacksquare - X^3 \cdot X^4 + X^3 \cdot 1 - 2X^7 - X^4 + 1 = \blacksquare \cdot X^{10} - \blacksquare - \blacksquare + \blacksquare + \blacksquare;$$

$$\text{b) } P(X) \cdot Q(X) - P(X) \cdot R(X) = (X^3 + 1) \cdot (-2X^7) - (X^3 + 1) \cdot (X^4 - 1) = X^3 \cdot (-2X^7) - 2X^7 - X^7 + X^3 - X^4 + 1 = \blacksquare \cdot X^{10} - \blacksquare - \blacksquare + \blacksquare + \blacksquare.$$

Concluzie: Polinoamele obținute sînt \blacksquare , deoarece au \blacksquare .

2.5. Descompunerea polinoamelor în factori ireductibili



INVESTIGĂM

• Descompuneți în factori ireductibili polinomul:

- a) $X^4 + 4X^2$; b) $X^3 - 3X^2 + 3X - 9$; c) $X^3 - 1$; d) $27X^3 + 1$; e) $2X^2 + X - 3$.

Rezolvare:

$$\text{a) } X^4 + 4X^2 = X^2 \cdot X^2 + 4 \cdot X^2 = X^2 \cdot (X^2 + 4);$$

$$\text{b) } X^3 - 3X^2 + 3X - 9 = X \cdot X^2 - 3 \cdot X^2 + 3 \cdot X - 3 \cdot 3 = X^2(X - 3) + 3(X - 3) = (X - 3)(X^2 + 3);$$

$$\text{c) } X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1);$$

d) $27X^3 + 1 = (3X)^3 + 1 = (3X + 1)(9X^2 - 3X + 1)$;

e) Aflăm soluțiile ecuației $2x^2 + x - 3 = 0$, asociate trinomului. Obținem $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{3}{2}$. Atunci $2X^2 + X - 3 = 2(X - 1)\left(X + \frac{3}{2}\right)$. (Verificați!)

Deci, $2X^2 + X - 3 = (X - 1)\left(2 \cdot X + 2 \cdot \frac{3}{2}\right) = (X - 1)(2X + 3)$.

Descompunerea în factori ireductibili a unui polinom constă în reprezentarea lui ca produs de două sau mai multe polinoame ireductibile de grad cel puțin egal cu 1. Polinomul este **ireductibil** dacă nu poate fi descompus în factori.

Polinoamele pot fi descompuse în factori aplicînd:

◆ **metoda factorului comun:** $XY + XZ + XT = X(Y + Z + T)$;

◆ **metoda grupării termenilor:** $XQ + YQ + XP + YP = (XQ + XP) + (YQ + YP) = X(Q + P) + Y(Q + P) = (Q + P)(X + Y)$;

◆ **formulele de calcul prescurtat:**

- restrîngerea pătratului unei sume (diferențe): $X^2 \pm 2XY + Y^2 = (X \pm Y)^2$,

- restrîngerea cubului unei sume (diferențe): $X^3 \pm 3X^2Y + 3XY^2 \pm Y^3 = (X \pm Y)^3$,

- descompunerea diferenței pătratelor: $X^2 - Y^2 = (X - Y)(X + Y)$,

- descompunerea sumei (diferenței) cuburilor: $X^3 \pm Y^3 = (X \pm Y)(X^2 \mp XY + Y^2)$;

◆ **descompunerea în factori a trinomului de gradul II:**

$aX^2 + bX + c = a(X - x_1)(X - x_2)$, unde x_1, x_2 sînt soluțiile ecuației de gradul II $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, numită **ecuație asociată** trinomului de gradul II;

◆ **metode combinate.**

Observație. Formulele de calcul prescurtat sînt adevărate și pentru polinoame.

APLICĂM

• Efectuați: a) $(2X^3 + X)^2$; b) $(1 - 5X)^3$.

Rezolvare:

a) $(2X^3 + X)^2 = (2X^3)^2 + 2 \cdot 2X^3 \cdot X + X^2 = \blacksquare + \blacksquare + X^2$;

b) $(1 - 5X)^3 = \blacksquare^3 - 3\blacksquare^2 + 3\blacksquare - \blacksquare^3 = \blacksquare - \blacksquare + \blacksquare - \blacksquare$.

• Aplicînd formulele și metodele studiate, descompuneți în factori ireductibili polinomul:

a) $X^6 - 16X^4$; b) $X^3 - 5X^2 + 3X - 15$; c) $X^4 - 1$;

d) $64X^3 + 1$; e) $(6X - 5)^2 - (5X - 4)^2$; f) $0,2X^2 - X - 10$.

Rezolvare:

a) $X^6 - 16X^4 = \blacksquare \cdot \blacksquare - 16 \cdot \blacksquare = X^4 \cdot (\blacksquare - \blacksquare)$;

b) $X^3 - 5X^2 + 3X - 15 = \blacksquare \cdot X^2 - 5 \cdot X^2 + 3X - 3 \cdot \blacksquare =$
 $= X^2 \cdot (\blacksquare - 5) + \blacksquare \cdot (X - \blacksquare) = \blacksquare \cdot \blacksquare$;

- c) $X^4 - 1 = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$;
 d) $64X^3 + 1 = (4X)^3 + 1^3 = (4X + 1)(16X^2 - 4X + 1)$;
 e) $(6X - 5)^2 - (5X - 4)^2 = [(6X - 5) - (5X - 4)][(6X - 5) + (5X - 4)] = \blacksquare \cdot \blacksquare$;
 f) Aflăm soluțiile ecuației $0,2x^2 - x - 10 = 0$, asociate trinomului. Obținem $x_1 = -5$, $x_2 = 10$. Atunci $0,2X^2 - X - 10 = 0,2 \cdot \blacksquare \cdot \blacksquare$.
 Deci, $0,2X^2 - X - 10 = 0,2(X + 5)(X - 10)$.

Exerciții și probleme

■ Fixăm cunoștințele

- Fie polinoamele $P(X) = X^3 - 3X^2 + \sqrt{2}X + 1$ și $Q(X) = X^4 - X^3 + X^2 - X + \sqrt{5}$.
 - Enumerați coeficienții polinoamelor $P(X)$ și $Q(X)$.
 - Stabiliți gradele monoamelor polinoamelor $P(X)$ și $Q(X)$.
 - Precizați gradele polinoamelor $P(X)$ și $Q(X)$.
 - Calculați valoarea numerică a polinomului $P(X)$ pentru $X = 2$.
 - Calculați valoarea numerică a polinomului $Q(X)$ pentru $X = -2$.
- Fie polinoamele $P(X) = -X^4 - 8X^3 + X^2 - 3X$ și $Q(X) = X^3 + 5X^2$.
 - Efectuați:

$$P(X) + Q(X) = S(X); \quad P(X) - Q(X) = D(X); \quad Q(X) - P(X) = R(X).$$
 Calculați și comparați:
 - $S(3)$ cu $P(3) + Q(3)$;
 - $D(-1)$ cu $P(-1) - Q(-1)$.
 - Precizați gradul fiecărui polinom: $S(X)$, $D(X)$, $R(X)$.
 - Stabiliți o relație între polinoamele $D(X)$ și $R(X)$.
- Fie polinoamele $P(X) = 5X^2 - 1$; $Q(X) = 5X^2 + 1$; $R(X) = X^4 + 2X^2 + 1$.
 Aflați:
 - $P(X) + Q(X) - R(X)$;
 - $P(X) \cdot Q(X)$;
 - $P(X) \cdot R(X)$;
 - $P(X) \cdot Q(X) - R(X)$;
 - $P^2(X)$;
 - $P^2(X) \cdot Q^2(X)$.
- Completați pînă la pătratul unui binom:
 - $16X^2 + \dots + 1$;
 - $9X^2 - \dots + 25$;
 - $X^2 + 10X + \dots$;
 - $3X^2 - \dots + 64$.
- Aplicînd metoda grupării termenilor, descompuneți în factori ireductibili:
 - $7X^4 - 9X^3 - 7X^2 + 9X$;
 - $X^4 + X^3 - X^2 - X$;
 - $X^3 - 5X^2 + 4X - 20$.
- Reștrîngeți:
 - $25X^2 - 10X + 1$;
 - $0,25X^2 + X + 1$;
 - $X^3 - 6X^2 + 12X - 8$;
 - $X^3 + 3X^2 + 3X + 1$.
- Aplicînd formulele diferența pătratelor, suma (diferența) cuburilor, descompuneți în factori polinomul:
 - $0,64X^2 - 1$;
 - $5X^2 - 45$;
 - $125X^3 - 64$;
 - $729X^3 + 1$.
- Descompuneți în factori trinomul:
 - $X^2 - 2X - 8$;
 - $4X^2 - 3X - 1$;
 - $-X^2 + X + 2$.

9. Fie polinoamele $P(X) = 2X^3 - X$ și $Q(X) = X^2 + 1$.

- a) $\text{grad } P(X) > \text{grad } Q(X)$.
- b) $Q^2(X) = X^4 + 2X^2 + 1$.
- c) $P(X) + Q(X) = 2X^3 + X^2 - X + 1$.



Formăm capacitățile și aplicăm

10. Fie polinoamele $P(X) = 8X^3 - X^2 + 10X - \sqrt{7}$ și $Q(X) = mX^3 + kX^2 + pX + n$ ($m, n, k, p \in \mathbb{R}$).

- a) Aflați valorile parametrilor reali m, n, k, p pentru care polinoamele $P(X)$ și $Q(X)$ sînt egale.
- b) Precizați gradele polinoamelor $P(X), Q(X)$.
- c) Pentru care valori ale parametrilor reali m, n, k, p polinomul $Q(X)$ este nul?
- d) Calculați: $P(-1), P(0), Q(-1), Q(0)$.

11. Fie polinoamele $P(X) = X^5 - 7kX^2 + 2X - k$ și $Q(X) = -X^5 + X^2 - 2X + k$.

- a) Efectuați: $S(X) = P(X) + Q(X)$, $D(X) = P(X) - Q(X)$.
- b) Precizați gradele polinoamelor $S(X), D(X)$.
- c) Aflați valoarea parametrului real k pentru care $P(X)$ este binom, iar $Q(X)$ – trinom.
- d) Aflați valoarea parametrului real k pentru care $S(X)$ este un monom de gradul doi.

12. Aplicînd formulele studiate, descompuneți în factori ireductibili polinomul:

- a) $(6X + 3)^2 - (5X - 4)^2$;
- b) $8X^3 - (X - 5)^3$;
- c) $125X^3 + (X + 1)^3$.

13. Descompuneți în factori ireductibili polinomul:

- a) $X^3 + 2X^2(X - 2) - 8$;
- b) $X^6 - 4X^3 + 4$;
- c) $X^5 - X^3 + 5X^2 + 5X$;
- d) $X^4 - X^2 + 2X + 2$.

14. Descompuneți în factori trinomul:

- a) $8X^2 + 3X - 0,5$;
- b) $-0,1X^2 - X - 20$;
- c) $X^2 - \sqrt{5}X - 2$.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

15. Fie polinomul $R(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

- a) Precizați gradul polinomului $R(X)$ în funcție de valorile parametrilor a, b, c, d .
- b) Aflați valorile coeficienților a, b, c, d , dacă: $R(0) = 1$, $R(-1) = 0$, $R(1) = -1$, $a = c$.

16. Fie polinomul $P(X) = aX^4 + 2X^2 + bX - X^3 + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- a) Aflați valorile coeficienților a, b, c , știind că forma canonică a polinomului $P(X)$ este $5X^4 - X^3 + 2X^2 - 8$.
- b) Scrieți în forma canonică polinomul $Q(X)$, știind că $P(X) + Q(X) = 0$.

17. Aflați valorile parametrilor reali a, b, c, d, e , știind că

$-P_1(X) \cdot P_2(X) = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$ și $P_1(X) = X^2 - 1$, $P_2(X) = 2X^2 - X + 5$.

18. Determinați polinoamele $P(X)$ de gradul doi cu coeficienți reali, astfel încît $P(\alpha^3) = (P(\alpha))^3$ pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$.

19. Descompuneți în factori ireductibili polinomul:

- a) $X^8 + 3X^4 - 4$;
- b) $X^{4n} - 16$, $n \in \mathbb{N}^*$;
- c) $X^{2n+1} - X$, $n \in \mathbb{N}^*$.

§ 3. Împărțirea polinoamelor

3.1. Împărțirea unui polinom la un polinom



INVESTIGĂM

- Fie polinomul $P(X) = 4X^2 + 24X$ și monomul $4X$.

Efectuați $P(X) : (4X)$.

Rezolvare:

Descompunem în factori polinomul $P(X)$ și obținem $P(X) = 4X^2 + 24X = 4X \cdot (X + 6)$.

Atunci $P(X) : (4X) = [4X \cdot (X + 6)] : (4X) = X + 6$.

Se spune că polinomul $C(X) = X + 6$ este **cîtul** împărțirii polinomului $P(X) = 4X^2 + 24X$ la monomul $4X$, deoarece $P(X) = 4X \cdot C(X)$.

- Fie polinoamele $P(X) = X^3 - 5X^2 - X + 5$ și $Q(X) = X^2 - 1$.

Efectuați $P(X) : Q(X)$.

Rezolvare:

Descompunem polinomul $P(X)$ în factori și obținem:

$$P(X) = X^3 - 5X^2 - X + 5 = X^2(X - 5) - (X - 5) = (X - 5)(X^2 - 1) = (X^2 - 1)(X - 5).$$

Deci, $P(X) = Q(X) \cdot (X - 5)$. Atunci $P(X) : Q(X) = [Q(X) \cdot (X - 5)] : Q(X) = X - 5$.

Astfel, polinomul $C(X) = X - 5$ este **cîtul** împărțirii polinomului $P(X) = X^3 - 5X^2 - X + 5$ la polinomul $Q(X) = X^2 - 1$, deoarece $P(X) = Q(X) \cdot C(X)$.

Constatăm că $\text{grad } C(X) = \text{grad } P(X) - \text{grad } Q(X) = 3 - 2 = 1$.

Observație. Polinomul $Q(X) = X^2 - 1$ este, de asemenea, **cîtul** împărțirii polinomului $P(X) = X^3 - 5X^2 - X + 5$ la polinomul $C(X) = X - 5$, deoarece $P(X) = C(X) \cdot Q(X)$.

3.2. Teorema împărțirii cu rest. Algoritmul împărțirii



INVESTIGĂM

- Fie polinoamele $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + X + 1$ și $Q(X) = X^2 + 1$.

Determinați dacă polinomul $P(X)$ se împarte la polinomul $Q(X)$.

Rezolvare:

Presupunem că $P(X)$ se împarte la $Q(X)$, adică există un polinom $C(X)$, astfel încît

$$P(X) = Q(X) \cdot C(X). \quad (1)$$

Cîtul $C(X)$ ar trebui să aibă gradul unu, deoarece

$$\text{grad } C(X) = \text{grad } P(X) - \text{grad } Q(X) = 3 - 2 = 1.$$

Polinomul de gradul unu $C(X)$ are forma $aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Atunci } P(X) &= 2X^3 - 3X^2 + X + 1 = Q(X) \cdot (aX + b) = (X^2 + 1)(aX + b) = \\ &= X^2 \cdot aX + X^2 \cdot b + aX + b = aX^3 + bX^2 + aX + b. \end{aligned}$$

Folosind noțiunea de egalitate a două polinoame, obținem sistemul $a = 2$, $b = -3$, $a = 1$, $b = 1$, care nu are soluții. Deci, presupunerea făcută este falsă, adică nu există polinomul $C(X)$ care verifică (1).

$$\begin{aligned} \text{Observăm că } P(X) &= 2X^3 - 3X^2 + X + 1 = 2X^3 + 2X - 3X^2 - 3 - X + 4 = \\ &= 2X(X^2 + 1) - 3(X^2 + 1) - X + 4 = (2X - 3)(X^2 + 1) + (-X + 4). \end{aligned}$$

În acest caz se spune că la împărțirea polinomului $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + X + 1$ la polinomul $Q(X) = X^2 + 1$ am obținut **cîtul** $2X - 3$ și **restul** $-X + 4$.

Gradul restului $-X + 4$ este 1 și este mai mic decît gradul împărțitorului $X^2 + 1$, care este 2.

- Efectuați $(2X^3 - 3X^2 + X + 1) : (X^2 + 1)$.

$$\begin{array}{r|l} \text{Rezolvare:} & 2X^3 - 3X^2 + X + 1 \quad | \quad X^2 + 1 \\ - & 2X^3 \quad \quad + 2X \quad \quad | \quad 2X - 3 \\ \hline & -3X^2 - X + 1 \\ - & -3X^2 \quad \quad - 3 \\ \hline & -X + 4 \end{array}$$

Vom descrie **algoritmul împărțirii a două polinoame** folosind acest exercițiu.

- ✓ Împărțim monomul $2X^3$ la monomul X^2 și obținem cîtul $2X$.
- ✓ Înmulțim $2X$ cu împărțitorul $X^2 + 1$ și obținem produsul parțial $2X^3 + 2X$, pe care-l scădem din deîmpărțit.
- ✓ Coborîm 1 și obținem deîmpărțitul $-3X^2 - X + 1$; împărțim monomul $-3X^2$ la monomul X^2 și obținem cîtul -3 .
- ✓ Înmulțim -3 cu împărțitorul $X^2 + 1$ și scădem produsul parțial $-3X^2 - 3$ din $-3X^2 - X + 1$.
- ✓ Am obținut deîmpărțitul $-X + 4$, însă nu putem continua împărțirea, deoarece monomul X nu poate fi împărțit la monomul X^2 . Deci, cîtul este $2X - 3$, iar restul este $-X + 4$.

$$\text{Răspuns: } 2X^3 - 3X^2 + X + 1 = (X^2 + 1) \cdot (2X - 3) + (-X + 4).$$

Observație. De regulă, se schimbă semnul fiecărui produs parțial, efectuîndu-se adunări ale deîmpărțitului cu opusul produsului parțial:

$$\begin{array}{r|l} + & 2X^3 - 3X^2 + X + 1 \quad | \quad X^2 + 1 \\ - & -2X^3 \quad \quad - 2X \quad \quad | \quad 2X - 3 \\ \hline & -3X^2 - X + 1 \\ + & +3X^2 \quad \quad + 3 \\ \hline & -X + 4 \end{array}$$

Teorema 1 (teorema împărțirii cu rest)

Fie polinoamele $P(X)$ și $Q(X)$, $Q(X) \neq 0$, cu coeficienți numere reale. Atunci există polinoamele $C(X)$ și $R(X)$, astfel încît:

- $P(X) = Q(X) \cdot C(X) + R(X)$, unde $R(X) = 0$ sau $\text{grad} R(X) < \text{grad} Q(X)$;
- polinoamele $C(X)$ și $R(X)$ sînt unic determinate.

APLICĂM

- Efectuați $P(X) : Q(X)$, știind că $P(X) = X^4 + 3X^3 - X^2 + 5X + 2$, $Q(X) = X^2 - 5X - 4$.

Rezolvare:

$$\begin{array}{r}
 X^4 + 3X^3 - X^2 + 5X + 2 \quad | \quad X^2 - 5X - 4 \\
 + \quad -X^4 + 5X^3 + 4X^2 \quad | \quad X^2 + \quad X + 4 \\
 \hline
 \quad \quad \quad X^3 + \quad X^2 + 5X \\
 \quad \quad + \quad -X^3 + \quad X^2 + \quad X \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad X^2 + \quad X + 2 \\
 \quad \quad + \quad -\quad X^2 + \quad X + \quad \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad X + \quad
 \end{array}$$

Deci,

$P(X) = X^4 + 3X^3 - X^2 + 5X + 2 = (X^2 - 5X - 4) \cdot (X^2 + 8X + 43) + 252X + 174$, unde cîțul este $C(X) = X^2 + 8X + 43$, iar restul $R(X) = 252X + 174$.

$\text{grad } Q(X) = 2$, $\text{grad } R(X) = 1$, deci $\text{grad } R(X) < \text{grad } Q(X)$.

Observație. Dacă restul $R(X)$ al împărțirii $P(X) : Q(X)$ este un polinom de gradul 0 (o constantă), vom nota $R(X) = r$.

3.3. Împărțirea unui polinom la binomul $X - \alpha$



INVESTIGĂM

- Fie polinomul $P(X) = X^2 - 4X + 9$ și binomul $Q(X) = X + 1$.

- a) Efectuați $P(X) : Q(X)$; b) Aflați $P(-1)$.

Rezolvare:

$$\begin{array}{r}
 \text{a) } \quad X^2 - 4X + 9 \quad | \quad X + 1 \\
 + \quad -X^2 - \quad X \quad | \quad X - 5 \\
 \hline
 \quad \quad -5X + 9 \\
 \quad \quad + \quad 5X + 5 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 14
 \end{array}$$

Deci, $C(X) = X - 5$ este cîțul, iar $R(X) = 14$ – restul împărțirii lui $P(X)$ la $Q(X)$.

- b) $P(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 9 = 14$. Observăm că $R(X) = P(-1) = 14$.

- Fie polinomul $P(X)$ și binomul $Q(X) = X - \alpha$.

Aflați dacă este adevărată propoziția: „Restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $X - \alpha$ este egal cu valoarea polinomului $P(X)$ pentru $X = \alpha$, adică $R(X) = P(\alpha)$ ”.

Rezolvare:

Să împărțim polinomul $P(X)$ la binomul $X - \alpha$. Conform teoremei împărțirii cu rest, obținem:

a) $P(X) = (X - \alpha)C(X) + R(X)$, unde $C(X)$ este cîțul, iar $R(X)$ – restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $X - \alpha$;

b) $\text{grad } R(X) < \text{grad } (X - \alpha)$.

Însă $\text{grad } (X - \alpha) = 1$, deci $\text{grad } R(X) = 0$, adică polinomul $R(X)$ este o constantă:
 $R(X) = r$.

Așadar, $P(X) = (X - \alpha)C(X) + r$.

Pentru $X = \alpha$ obținem $P(\alpha) = (\alpha - \alpha) \cdot C(\alpha) + r \Leftrightarrow r = R(X) = P(\alpha)$.

Deci, $R(X) = P(\alpha)$ este o propoziție adevărată. Astfel, am demonstrat

Teorema 2 (teorema lui Bézout¹⁾)

Restul împărțirii unui polinom $P(X)$ la binomul $X - \alpha$ este egal cu valoarea numerică a acestui polinom pentru $X = \alpha$, adică $R(X) = P(\alpha)$.

APLICĂM

• Aflați restul împărțirii polinomului $P(X) = X^4 + mX^2 + mX - 1$ la binomul $X - m$, știind că la împărțirea polinomului $P(X)$ la binomul $X - 1$ restul este -6 .

Rezolvare:

Din condiția $P(1) = -6$ (conform teoremei lui Bézout) obținem:

$$1^4 + m \cdot 1^2 + m \cdot 1 - 1 = -6 \Leftrightarrow 2m = -6 \Leftrightarrow m = -3.$$

Deci, polinomul $P(X)$ are forma $X^4 - 3X^2 - 3X - 1$.

Restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $X + 3$ este, conform teoremei lui Bézout,

$$P(-3) = (-3)^4 - 3 \cdot (-3)^2 - 3 \cdot (-3) - 1 = 62.$$

Răspuns: $r = 62$.

Observație. Un polinom $P(X)$ se împarte exact (fără rest) la binomul $X - \alpha$, dacă $P(\alpha) = 0$.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

- Aflați dacă este adevărată propoziția $P(X) = Q(X) \cdot C(X) + R(X)$, unde:
 - $P(X) = X^2 - 7X - 13$, $Q(X) = X - 4$, $C(X) = X + 3$, $R(X) = -1$.
 - $P(X) = X^3 - 10X^2 - X - 10$, $Q(X) = X^2 - 1$, $C(X) = X + 10$, $R(X) = 3$.
 - $P(X) = 2X^4 + X^3 + 2X + 1$, $Q(X) = 2X^2 + 1$, $C(X) = X^2 - X$, $R(X) = X + 3$.
- Fie polinomul $P(X) = X^3 + X^2 - 5X - 5$. Efectuați:
 - $P(X) : (X - 1)$ și comparați restul cu $P(1)$;
 - $P(X) : (X + 1)$ și comparați restul cu $P(-1)$;
 - $P(X) : X$ și comparați restul cu $P(0)$;
 - $P(X) : (2X + 1)$ și comparați restul cu $P\left(-\frac{1}{2}\right)$.



¹⁾ Etienne Bézout (1730–1783) – matematician francez.

3. Folosind teorema lui Bézout, aflați restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $Q(X)$, dacă:
- a) $P(X) = X^2 + 2X + 1$, $Q(X) = X + 1$; b) $P(X) = -3X^2 + X$, $Q(X) = X - 5$;
 c) $P(X) = 8X + 2$, $Q(X) = X + 3$; d) $P(X) = 3X^3 - X + 81$, $Q(X) = X - 3$;
 e) $P(X) = -2X^4 + X^3 + X^2 + 2$, $Q(X) = X + 1$; f) $P(X) = X^3 + X^2 - X + 8$, $Q(X) = X + 2$.

■ ■ ■ Formăm capacitățile și aplicăm

4. Efectuați $P(X) : Q(X)$, dacă:
- a) $P(X) = X^3 - 3X^2 + X - 9$, $Q(X) = X^2$;
 b) $P(X) = 2X^3 - X^2 + 4$, $Q(X) = X^3 - X$;
 c) $P(X) = -5X^3 + X^2 - X + 4$, $Q(X) = X^3 + 1$;
 d) $P(X) = X^5 - X^3 + X$, $Q(X) = X^2 - 1$;
 e) $P(X) = 2X^3 + X^2 + 5X + 60$, $Q(X) = X + 3$.
5. Determinați câtul și restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $Q(X)$, dacă:
- a) $P(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X$, $Q(X) = X + 2$;
 b) $P(X) = -5X^4 - X^3 + X^2 - 2X - 6$, $Q(X) = X - 1$;
 c) $P(X) = 2X^5 - 3X^4 + 4X^3 + X^2 + 2$, $Q(X) = X - 4$;
 d) $P(X) = X^8 + 2X^4 + 1$, $Q(X) = X + 1$;
 e) $P(X) = X^4 + X^3 + X + 1$, $Q(X) = X - 3$;
 f) $P(X) = X^6 - 125$, $Q(X) = X - \sqrt{5}$.

■ ■ ■ Dezvoltăm capacitățile și creăm

6. Aflați valorile parametrilor reali a, b , știind că există binomul $P(X)$, astfel încît:
 $(X^3 - aX^2 - bX + 1) : P(X) = X^2 - X + 1$.
7. Determinați polinomul $P(X)$, dacă se știe că el satisface simultan condițiile:
 a) restul împărțirii lui $P(X)$ la $Q(X) = X^3 - 2$ este egal cu pătratul câtului acestor polinoame;
 b) $P(-2) + P(2) + 34 = 0$.
8. Aflați valorile parametrului real a , astfel încît r să fie restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $Q(X)$:
- a) $P(X) = X^3 + a^2X^2 + 3aX + 1$, $Q(X) = X - 1$, $r = 12$;
 b) $P(X) = X^3 + a^2X^2 + 3aX + 1$, $Q(X) = X - 1$, $r = 6$;
 c) $P(X) = aX^3 + a^2X^2 + 3a + 1$, $Q(X) = X + 1$, $r = 0$.

• **Problemă pentru campioni**

9. Împărțind polinomul $P(X) = X^3 - aX^2 + bX - 1$, pe rînd, la $Q_1(X) = X$, $Q_2(X) = X + 1$, $Q_3(X) = X - 2$, se obține același rest. Aflați restul împărțirii lui $P(X)$ la $Q(X) = X^2 - 3$.

§ 4. Rădăcinile polinoamelor



INVESTIGĂM

• Fie polinomul $P(X) = X^3 - 5X^2 + 4X$. Aflați numerele reale α , astfel încât $P(\alpha) = 0$.

Rezolvare:

Ecuția $x^3 - 5x^2 + 4x = 0$ se numește **ecuație asociată** polinomului $P(X)$. Rezolvăm ecuația și obținem soluțiile $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$. (Confirmați!)

Atunci $P(0) = 0$, $P(1) = 0$, $P(4) = 0$. Numerele 0, 1, 4 sînt rădăcini ale polinomului $P(X)$.

Definiție

Numărul real α se numește **rădăcină** a polinomului $P(X)$ dacă valoarea numerică a polinomului $P(X)$ în α este egală cu 0, adică $P(\alpha) = 0$.

Observație. Pentru a afla **rădăcinile unui polinom**, aflăm **soluțiile ecuației asociate** acestuia.

APLICĂM

• Aflați rădăcinile polinomului $P(X) = X^3 - 3X - 2$.

Rezolvare:

Rezolvăm ecuația $x^3 - 3x - 2 = 0$, asociată polinomului $P(X) = X^3 - 3X - 2$.

Obținem $x^3 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x^3 - 4x) + (x - 2) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) + (x - 2) = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow (x - 2)[x(x + 2) + 1] = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x = 2$ sau $x = -1$. Prin urmare, rădăcinile polinomului $P(X)$ sînt 2 și -1.

Rădăcina $\alpha = 2$ este **rădăcină simplă**, iar rădăcina $\alpha = -1$ este **rădăcină dublă** pentru polinomul $P(X) = X^3 - 3X - 2 = (X - 2)(X + 1)^2$.

Definiții

♦ Numărul m , $m \in \mathbb{N}^*$, se numește **ordinul de multiplicitate** al rădăcinii α a polinomului $P(X)$ dacă $P(X)$ se împarte la $(X - \alpha)^m$ și nu se împarte la $(X - \alpha)^{m+1}$.

♦ Dacă $m = 1$, atunci α se numește **rădăcină simplă**; dacă $m \geq 2$, atunci α se numește **rădăcină multiplă de ordin m** a polinomului $P(X)$.

Rădăcina unui polinom care are ordinul de multiplicitate 2 (respectiv 3) se numește **rădăcină dublă** (respectiv **triplă**).

Exemplu

Numărul $\alpha = -2$ este rădăcină triplă a polinomului $Q(X) = (X + 2)^3(X + \sqrt{5})$, deoarece $Q(X)$ se împarte la $(X + 2)^3$, dar nu se împarte la $(X + 2)^4$.

Teorema 3

Fie $P(X)$ un polinom nenul. Numărul real α este rădăcină a polinomului $P(X)$ dacă și numai dacă polinomul $P(X)$ se împarte exact la binomul $X - \alpha$.

Demonstrație

Fie α o rădăcină a polinomului $P(X)$, adică $P(\alpha) = 0$. Atunci din teorema împărțirii cu rest pentru polinoame rezultă că restul împărțirii lui $P(X)$ la $X - \alpha$ este zero și deci polinomul $P(X)$ se împarte exact la binomul $X - \alpha$.

Reciproc, fie polinomul $P(X)$ se împarte exact la binomul $X - \alpha$. Atunci există un polinom $C(X)$, astfel încât $P(X) = (X - \alpha) \cdot C(X)$ și $P(\alpha) = (\alpha - \alpha)C(\alpha) = 0$. Deci, $P(\alpha) = 0$, adică α este rădăcină a polinomului $P(X)$. ►

APLICĂM

• Fie polinoamele $P(X) = 3X^2 - X - 2$ și $Q(X) = X - 1$.

Determinați dacă polinomul $P(X)$ se împarte exact la binomul $Q(X)$.

Rezolvare:

Numărul real 1 este rădăcină a polinomului $P(X)$. Deoarece $P(1) = 0$, conform teoremei 3, obținem că polinomul $P(X)$ se împarte exact la binomul $Q(X) = X - 1$.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Determinați care dintre numerele -1 ; $-0,5$; 0 ; 2 ; 5 sînt rădăcini ale polinomului:

a) $P(X) = -3X^2 - X^2 + 2$;

b) $Q(X) = 5X^5 - 3X^3 + 2X^2$;

c) $R(X) = (X - 5)(X - 0,5)(X - 2)$;

d) $H(X) = X^4 - 1$.

2. Scrieți un polinom de gradul doi, astfel încît numerele:

a) $-\frac{1}{4}$ și $-\frac{3}{4}$;

b) $\sqrt{2}$ și $2\sqrt{2}$;

c) -1 și 5

să fie rădăcinile acestuia.

3. Adevărat sau Fals?

a) $\alpha = -2$ este rădăcină a polinomului $P(X) = X^5 - X^4 + 8X$.

b) $\alpha = -3$ este rădăcină a polinomului $Q(X) = -X^3 + 6X^2 - 81$.

c) $\alpha = 0$ este rădăcină a polinomului $H(X) = X^{20} - X^{10} + X - 1$.

d) $\alpha = \frac{1}{2}$ este rădăcină a polinomului $R(X) = 2X^4 + 3X^2 - X + 5$.



4. Fie polinoamele:

a) $P(X) = 3X^2 - X - 2$ și $Q(X) = X - 1$;

b) $P(X) = X^5 - X^2 + X$ și $Q(X) = X$;

c) $P(X) = -0,2X^3 - X^2 + 4$ și $Q(X) = X + 3$.

Determinați dacă polinomul $P(X)$ se împarte exact la binomul $Q(X)$.

Formăm capacitățile și aplicăm

5. Completați, astfel încît polinomul obținut:

1) să aibă două rădăcini reale simple;

2) să aibă o rădăcină reală multiplă de ordinul 2;

3) să nu aibă rădăcini reale.

a) $P(X) = 4X^2 - 4X + \blacksquare$;

b) $P(X) = \blacksquare X^2 - 10X + 25$;

c) $P(X) = 3X^2 + \blacksquare X + 1$;

d) $P(X) = X^2 - \blacksquare X - \blacksquare$.

6. Aflați rădăcinile reale ale polinomului:

a) $P(X) = 3X^4 - X^2 - 2$;

b) $P(X) = X^3 - 5X^2 + 6X$;

c) $P(X) = 27X^3 - 1$;

d) $P(X) = 16X^4 - 64$.

7. a) Scrieți un polinom de gradul doi care să aibă o rădăcină dublă;

b) scrieți un polinom de gradul trei care să aibă o rădăcină triplă;

c) scrieți un polinom de gradul trei care să aibă o rădăcină simplă și o rădăcină dublă.

8. Fie polinoamele: a) $P(X) = X^3 - X^2 - X - 1$ și $Q(X) = X + 1$;

b) $P(X) = X^3 - X^2 - X - 1$ și $Q(X) = X - 1$;

c) $P(X) = X^4 - 3X^3 - X^2 + 9$ și $Q(X) = X - 3$.

Determinați dacă polinomul $P(X)$ se împarte exact la binomul $Q(X)$.

9. Determinați ordinul de multiplicitate al rădăcinii $\alpha = -5$ a polinomului:

a) $P(X) = X^2 + 10X + 25$;

b) $P(X) = X^3 + 15X^2 + 75X + 125$;

c) $P(X) = X^4 - 625$.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

10. Fie polinomul $P(X) = (3a + b)X^2 + 6X(a - b) + 11$.

a) Determinați numerele reale a și b , astfel încât $P(X) = -2X^2 - 5X + 11$.

b) Aflați rădăcinile polinomului $P(X)$.

11. Aflați coeficienții reali a și b , dacă se știe că polinomul $P(X) = X^4 - 5X^3 + 8X^2 + aX + b$ se împarte fără rest la polinomul $Q(X) = (X - 1)^2$.

• Problemă pentru campioni

12. Fie polinomul $P(X) = X^4 + aX^3 + bX + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Demonstrați că nu există numerele reale a, b, c , astfel încât polinomul $P(X)$ să se împartă exact la polinomul $Q(X) = X^3 - X$.

§ 5. Operații cu fracții algebrice. Recapitulare și completări

5.1. Noțiunea de fracție algebrică



INVESTIGĂM

• Fie fracția algebrică $\frac{X^3(1+X)}{(X+1)^2(4X-X^3)}$.

a) Aflați domeniul valorilor admisibile în \mathbb{R} al fracției algebrice.

b) Aflați valoarea fracției algebrice pentru $X = \sqrt{3}$.

Rezolvare:

a) Aflăm rădăcinile polinomului – numitorul fracției algebrice, rezolvând ecuația asociată acestuia:

$$(x+1)^2(4x-x^3) = 0 \Leftrightarrow x(x+1)^2(4-x^2) = 0 \Leftrightarrow x(x+1)^2(2-x)(2+x) = 0.$$

Polinomul – numitorul fracției algebrice are rădăcinile $-2, -1, 0, 2$. Prin urmare, DVA în \mathbb{R} al acestei fracții este $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 2\}$.

b) Înlocuim în fracția algebrică X cu $\sqrt{3}$ și obținem:

$$\frac{(\sqrt{3})^3(1+\sqrt{3})}{(\sqrt{3}+1)^2[4\sqrt{3}-(\sqrt{3})^3]} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} = \frac{3}{\sqrt{3}+1} = \frac{3 \cdot (\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = 1,5(\sqrt{3}-1).$$

Definiție

Raportul a două polinoame se numește **fracție algebrică** sau **fracție rațională**.

Domeniul valorilor admisibile (se notează DVA) al unei fracții raționale cu o nedeterminată într-o mulțime dată (\mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R}) este submulțimea mulțimii date în care numitorul fracției nu se anulează.

Valoarea fracției algebrice în x_0 este raportul valorilor numărătorului și numitorului acesteia pentru $X = x_0$.

5.2. Operații cu fracții algebrice

5.2.1. Simplificarea și amplificarea fracțiilor algebrice



INVESTIGĂM

• Fie polinoamele $P(X) = X(1 - X^2)$ și $Q(X) = (X + 1)(X - 4X^3)$.

a) Scrieți fracția algebrică $\frac{P(X)}{Q(X)}$.

b) Aflați DVA al fracției algebrice $\frac{P(X)}{Q(X)}$.

c) Simplificați $\frac{P(X)}{Q(X)}$, astfel încât să obțineți o fracție ireductibilă de forma $\frac{P_1(X)}{Q_1(X)}$.

d) Aflați DVA al fracției algebrice $\frac{P_1(X)}{Q_1(X)}$.

e) Comparați DVA al fracțiilor algebrice $\frac{P(X)}{Q(X)}$ și $\frac{P_1(X)}{Q_1(X)}$.

f) Amplificați pe DVA fracția algebrică $\frac{P_1(X)}{Q_1(X)}$ cu polinomul $R(X) = X^3 + 1$.

Rezolvare:

a)
$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{X(1 - X^2)}{(X + 1)(X - 4X^3)}$$

b) $(x + 1)(x - 4x^3) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ sau $x(1 - 4x^2) = 0$. Soluțiile ecuațiilor sînt $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -0,5$, $x_4 = 0,5$. (Verificați.)

Deci, DVA al fracției obținute în a) este $\mathbb{R} \setminus \{-0,5; 0; 0,5; 1\}$.

c)
$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{X(1 - X)(1 + X)}{X(X + 1)(1 - 4X^2)} \stackrel{(X(X+1))}{=} \frac{-(X - 1)}{1 - 4X^2} = \frac{X - 1}{4X^2 - 1} = \frac{P_1(X)}{Q_1(X)}$$

d) $4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -0,5$ sau $x = 0,5$. Pentru $\frac{P_1(X)}{Q_1(X)}$ DVA este $\mathbb{R} \setminus \{-0,5; 0,5\}$.

e) Pentru $\frac{P(X)}{Q(X)}$ DVA este $\mathbb{R} \setminus \{-0,5; 0; 0,5; 1\}$, iar pentru $\frac{P_1(X)}{Q_1(X)}$ DVA este $\mathbb{R} \setminus \{-0,5; 0,5\}$. Deci, DVA al fracțiilor $\frac{P(X)}{Q(X)}$ și $\frac{P_1(X)}{Q_1(X)}$ este diferit.

$$f) \frac{P_1(X)}{Q_1(X)} \cdot \frac{R(X)}{R(X)} = \frac{X^{3+1} \cdot X - 1}{4X^2 - 1} = \frac{(X-1)(X^3+1)}{(4X^2-1)(X^3+1)} = \frac{X^4 - X^3 + X - 1}{4X^5 - X^3 + 4X^2 - 1}.$$

A simplifica (a amplifica) o fracție algebrică înseamnă a împărți (a înmulți) numărătorul și numitorul fracției la (cu) același polinom de grad cel puțin egal cu 1. Prin simplificarea (amplificarea) unei fracții algebrice se obține o fracție egală cu cea dată în domeniul valorilor admisibile al celor două fracții. Prin simplificarea (amplificarea) unei fracții algebrice se poate modifica DVA.

Definiții

- ◆ Frația algebrică care se poate simplifica se numește **reductibilă**.
- ◆ Frația algebrică care nu se poate simplifica se numește **ireductibilă**.

APLICĂM

Simplificați fracția algebrică $\frac{1-X^3}{X^3+X^2+X}$.

Rezolvare:

$$\text{DVA: } \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad \frac{1-X^3}{X^3+X^2+X} = \frac{1-X^3}{X(X^2+X+1)} = \frac{(1-X)(X^2+X+1)}{X(X^2+X+1)} = \frac{1-X}{X}.$$

$$\text{Răspuns: } \frac{1-X^3}{X^3+X^2+X} = \frac{1-X}{X}.$$

5.2.2. Adunarea fracțiilor algebrice



INVESTIGĂM

- Efectuați în DVA: a) $\frac{X}{X^2-4} + \frac{2}{4-X^2}$; b) $\frac{1}{3X+1} + \frac{1}{9X^2-3X+1}$.

Rezolvare:

a) DVA: $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

$$\frac{X}{X^2-4} + \frac{2}{4-X^2} = \frac{X}{X^2-4} + \frac{2}{-(X^2-4)} = \frac{X}{X^2-4} - \frac{2}{X^2-4} = \frac{X-2}{X^2-4} \stackrel{(X-2)}{=} \frac{1}{X+2}.$$

$$b) \text{ DVA: } \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{3} \right\}. \quad \frac{1}{3X+1} + \frac{1}{9X^2-3X+1} = \frac{9X^2-3X+1+3X+1}{(3X+1)(9X^2-3X+1)} = \frac{9X^2+2}{27X^3+1}.$$

Rezultatul adunării a două fracții algebrice cu același numitor este o fracție algebrică care are numitorul egal cu numitorul fracțiilor date și numărătorul egal cu suma algebrică a numărătorilor fracțiilor algebrice.

- Pentru a aduna pe DVA două fracții algebrice cu numitori diferiți, fracțiile se aduc la același numitor, apoi rezultatele se adună ca fracții cu același numitor.
- Dacă rezultatul adunării fracțiilor algebrice este o fracție algebrică reducibilă, atunci se execută simplificări pînă se obține o fracție algebrică ireductibilă.

5.2.3. Înmulțirea și împărțirea fracțiilor algebrice. Puteri ale fracțiilor algebrice cu exponent întreg



INVESTIGĂM

- 1) Aduceți la forma cea mai simplă:

$$\text{a) } \frac{X+3}{X^2+6X+9} \cdot \frac{X^2-9}{27-X^3}; \quad \text{b) } \frac{X^3-2\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{3}X+3} \cdot \frac{X^2+\sqrt{2}X+2}{X^3+3\sqrt{3}}; \quad \text{c) } \left(\frac{X-1}{X^2}\right)^3.$$

- 2) Comparați domeniile valorilor admisibile ale expresiilor inițiale cu domeniul valorilor admisibile al produsului final.

Rezolvare:

- 1) a) DVA: $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

$$\frac{X+3}{(X+3)^2} \cdot \frac{(X-3)(X+3)}{(3-X)(9+3X+X^2)} = \frac{(X+3)^2(X-3)}{(X+3)^2(3-X)(X^2+3X+9)} \stackrel{((X+3)^2(3-X))}{=} = -\frac{1}{X^2+3X+9}. \text{ DVA al produsului este } \mathbb{R}.$$

- b) DVA: $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}\}$.

$$\begin{aligned} \frac{X^3-2\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{3}X+3} \cdot \frac{X^2+\sqrt{2}X+2}{X^3+3\sqrt{3}} &= \frac{X^3-(\sqrt{2})^3}{X^2-\sqrt{3}X+3} \cdot \frac{X^3+(\sqrt{3})^3}{X^2+\sqrt{2}X+2} = \\ &= \frac{(X-\sqrt{2})(X^2+\sqrt{2}X+2)(X+\sqrt{3})(X^2-\sqrt{3}X+3)}{(X^2+\sqrt{2}X+2)(X^2-\sqrt{3}X+3)} = (X-\sqrt{2})(X+\sqrt{3}) = \\ &= X^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})X-\sqrt{6}. \text{ DVA al cîntului este } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- c) DVA: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\left(\frac{X-1}{X^2}\right)^3 = \frac{(X-1)^3}{(X^2)^3} = \frac{X^3-3X^2+3X-1}{X^6}$. DVA al rezultatului obținut este $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- 2) Domeniile valorilor admisibile ale expresiilor inițiale diferă de domeniile valorilor admisibile ale expresiilor finale în cazurile a), b) și nu diferă în cazul c).

- Pentru a afla produsul a două fracții algebrice, se înmulțesc numărătorii și numitorii între ei.
- Pentru a împărți două fracții algebrice, se înmulțește prima fracție cu inversa celei de a doua fracții.
- Deoarece produsul fracțiilor algebrice este o fracție ireductibilă, este posibil ca expresia inițială și fracția finală să aibă domenii ale valorilor admisibile diferite.

Observație. În mulțimea fracțiilor algebrice, operațiile cu puteri cu exponenți întregi se execută ca și operațiile cu puteri cu exponenți întregi în mulțimea numerelor raționale reprezentate prin litere.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Aflați DVA al perechilor de fracții algebrice:

a) $\frac{X+5}{4}$ și $\frac{X-6}{2}$;

b) $\frac{1}{X-3}$ și $\frac{X}{X+3}$;

c) $\frac{X-4}{3X+6}$ și $\frac{3X-1}{X^2+2X}$.

2. Scrieți fiecare sumă de două fracții algebrice din exercițiul 1 sub formă de fracție ireductibilă.

3. Precizați DVA al fracțiilor ireductibile obținute în 2.

4. Calculați valoarea fracției obținute ca rezultat al adunării fracțiilor din exercițiul 1 c) pentru:

a) $X = -1$;

b) $X = 0,25$;

c) $X = 2$.

Formăm capacitățile și aplicăm

5. Efectuați pe DVA:

a) $\frac{X+3}{X^2+2X} + \frac{X-3}{4-X^2}$;

b) $\frac{(X+4)^2}{X^2+4X} + \frac{(X-4)^2}{X^2-4X}$;

c) $\frac{3-X^2}{9-X^2} + \frac{X+3}{X-3}$;

d) $\frac{-125}{X^2-5X} + \frac{X^2}{X-5}$;

e) $\frac{X^3}{X^2-64} - \frac{X}{X-8} + \frac{2}{X+8}$;

f) $\left(\frac{1}{X-1}\right)^{-1} + \frac{X}{X+1} - \frac{X+2}{X^2-1}$.

6. Scrieți sub formă de fracție algebrică ireductibilă pe DVA:

a) $\frac{2X-6}{X^2} \cdot \frac{X^3}{X-3}$;

b) $\frac{\sqrt{3}X^2}{2X-2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}X-2}{3X^3}$;

c) $\frac{X^2-100}{2X^5} \cdot \frac{-X^2}{X-10}$;

d) $(X^2-4) \cdot \frac{(X+2)^2}{X-2}$;

e) $\frac{(Y-5)^2}{3Y+18} \cdot \frac{3Y^2-75}{Y^2-36}$;

f) $\left(\frac{X^2-4}{X}\right)^{-2} \cdot \frac{X^2+1}{X-2}$.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

7. Aduceți la forma cea mai simplă pe DVA:

a) $\left(X - \frac{3}{X-1}\right) \cdot \left(\frac{2(1-X)}{6+2X-2X^2}\right)$;

b) $(X^2-3X+2)X \cdot \left(\frac{3X}{X-2} - \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X^2-3X+2}\right)$;

c) $\left(\frac{8X^3+1}{8X^2+1}\right)^{-1} \cdot \frac{4X^2-2X+1}{4X^2-1} \cdot (1-2X)^2$;

d) $\frac{4X^2-1}{8X^3+1} \cdot \left(\frac{4X^2-4X+1}{4X^2-2X+1} \cdot \frac{1}{2X+1}\right)$

8. Fie $E(X) = \frac{X^2+3X+2}{X-2}$.

a) Scrieți expresia sub forma $E(X) = aX + b + \frac{c}{X-2}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Determinați coeficienții a, b, c .

b) Determinați $a \in \mathbb{Z}$, astfel încât $E(a) \in \mathbb{Z}$.

Exerciții și probleme recapitulative

■ Fixăm cunoștințele

- Scrieți în forma canonică și determinați gradul polinomului:
 - $P(X) = 6X^2 - 3 - 7X^3 - 2X^2 + 3$;
 - $Q(Y) = 7Y^3 - 8 - 6Y^2 + 3Y + 4Y^2 - 7Y^3 + 20$.
- Scrieți în forma canonică suma, diferența și produsul polinoamelor $P(X)$ și $Q(X)$:
 - $P(X) = 3X^2$; $Q(X) = 2X^2 - 10X + 4$;
 - $P(X) = -X^2 - 1$; $Q(X) = -3X^3 + 6X + 2$.
- Scrieți în forma canonică:
 - $(3X + 2)^3$;
 - $(-\sqrt{3} + Y)^3$;
 - $(3Y - 1)(9Y^2 + 3Y + 1)$;
 - $(3X + 1)(9X^2 - 3X + 1)$.
- Determinați care dintre elementele mulțimii $\{-2, -1, 0, 1, 3, 5\}$ sînt rădăcini ale polinomului:
 - $P(X) = X^3 - 25X$;
 - $P(X) = X^3 - 2X^2 - X - 2$;
 - $P(X) = X^3 - 4X^2 + 3X$.

■ ■ Formăm capacitățile și aplicăm

- Descompuneți în factori polinomul:
 - $4X^2 + 4X + 1$;
 - $Z^2 - Z + 0,25$;
 - $9X^2 + 42X + 49$;
 - $9X^2 - 6X + 1$.
- Aplicînd formulele studiate, descompuneți în factori ireductibili polinomul:
 - $16Y^2 - 25(Y + 4)^2$;
 - $(2X - 9)^2 - 81$;
 - $64X^3 + 1$;
 - $Z^6 - 125$.
- Descompuneți în factori ireductibili grupînd termenii polinomului:
 - $X^2 - 5X + X - 5$;
 - $2Y^3 - 4Y^2 + Y - 2$;
 - $X^3 - X^2 - 8X + 8$;
 - $X^3 + X^2 + \sqrt{3}X + \sqrt{3}$.
- Aflați cîtul și restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $Q(X)$:
 - $P(X) = X^2 + X - 20$, $Q(X) = X - 4$;
 - $P(X) = 6X^3 + X^2 - 29X + 20$, $Q(X) = 2X - 3$.
- Aplicînd teorema lui Bézout, determinați restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $Q(X) = X - \alpha$, dacă:
 - $P(X) = 2X^3 + 4X + 1$, $\alpha = 1$;
 - $P(X) = -3X^4 - 5X^2 + 6X - 21$, $\alpha = -2$.
- Stabiliți dacă polinomul $P(X)$ se împarte exact la polinomul $Q(X)$:
 - $P(X) = X^4 - 64$, $Q(X) = X + 4$;
 - $P(X) = 2X^3 - 5X + 1$, $Q(X) = (X - 3)(X + 1)$.

■ ■ ■ Dezvoltăm capacitățile și creăm

- Aflați valorile parametrului real a , știind că polinomul $P(X)$ se împarte exact la polinomul $Q(X)$:
 - $P(X) = 2X^3 - 5X^2 + aX + a$, $Q(X) = X - 3$;
 - $P(X) = aX^3 + 3X^2 + (a - 1)X - 2$, $Q(X) = (X - 2)(X + 2)$.
- Efectuați pe DVA $\left(\frac{1}{X^2 - 3X} + \frac{1}{X} + \frac{1}{X - 3}\right)^3$.
- Fie x_1 și x_2 rădăcinile polinomului $P(X) = 2X^2 - 3X - 5$. Aflați:
 - $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$;
 - $x_1^2 + x_2^2$;
 - $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$.
- Scrieți polinomul $Q(X)$ în forma canonică, știind că rădăcinile lui sînt egale cu inversele rădăcinilor polinomului $P(X) = 3X^2 + X - 15$.

• Problemă pentru campioni

- Fie $P(X)$ un polinom cu coeficienți reali, cu gradul cel mult egal cu 2, astfel încît $P(\alpha) = 0$ pentru $\alpha \in \{1, 2, 3\}$. Demonstrați că $P(X)$ este polinomul nul.

Test sumativ

Timp efectiv de lucru:
45 de minute



Varianta I

1. Fie polinomul

$$P(X) = 5X^2 - (X^4 - 4X^2 - X) - 1.$$

a) Scrieți polinomul în forma canonică. **2 p**

b) Completați caseta: **1 p**

$$\text{grad } P(X) = \square.$$

c) Aflați restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $Q(X) = X - 1$ fără a efectua împărțirea. **2 p**

d) Aflați rădăcinile polinomului $P(X) - Q(X)$. **5 p**

e) Determinați $C(X)$ și $R(X)$, astfel încât $P(X) = (X^2 - 1) \cdot C(X) + R(X)$. **6 p**

2. Fie expresia $E(X) = \frac{4}{X^2 + 8} - \frac{3}{X^2 + 5}$.

a) Indicați litera **A** dacă propoziția este adevărată, sau litera **F** dacă ea este falsă: „DVA al expresiei $E(X)$ este \mathbb{R} ”. **1 p**

A **F**

b) Aflați valorile reale ale lui X pentru care $E(X) \neq 0$. **4 p**

c) Aduceți expresia $E(X) : (2X^2 + 16)^{-1}$ la forma cea mai simplă. **4 p**

d) Aflați $E(\alpha)$, dacă α este rădăcina pozitivă a polinomului $P(X) = X(X^2 - 4)$. **5 p**

Varianta II

1. Fie polinomul

$$P(X) = 3X^2 - (X^3 + X^2 - X) + 1.$$

a) Scrieți polinomul în forma canonică.

b) Completați caseta:

$$\text{grad } P(X) = \square.$$

c) Aflați restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $Q(X) = X + 1$ fără a efectua împărțirea.

d) Aflați rădăcinile polinomului $P(X) - Q(X)$.

e) Determinați $C(X)$ și $R(X)$, astfel încât $P(X) = (X^2 + 1) \cdot C(X) + R(X)$.

2. Fie expresia $E(X) = \frac{5}{X^2 + 6} - \frac{4}{X^2 - 5}$.

a) Indicați litera **A** dacă propoziția este adevărată, sau litera **F** dacă ea este falsă: „DVA al expresiei $E(X)$ este \mathbb{R} ”. **1 p**

A **F**

b) Aflați valorile reale ale lui X pentru care $E(X) \neq 0$. **4 p**

c) Aduceți expresia $E(X) : (2X^2 + 12)^{-1}$ la forma cea mai simplă.

d) Aflați $E(\alpha)$, dacă α este rădăcina negativă a polinomului $P(X) = X(X^2 - 9)$. **5 p**

Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	30-29	28-26	25-23	22-18	17-14	13-9	8-7	6-5	4-3	2-0

§ 1. Ecuatii de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Recapitulare și completări

1.1. Noțiunea de ecuație cu o necunoscută

• Rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

a) $2x - 3 = 5$; b) $x^2 + 8 = 0$; c) $0,25x(8x + 4) + 5 = 2(x^2 + 0,5x + 2) + 1$.

Rezolvare:

a) DVA: \mathbb{R} . $2x - 3 = 5 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$. $S = \{4\}$.

b) DVA: \mathbb{R} . $x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -8$. $S = \emptyset$.

c) DVA: \mathbb{R} . $0,25x(8x + 4) + 5 = 2(x^2 + 0,5x + 2) + 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \square = \square \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. $S = \mathbb{R}$.

• Fie ecuațiile $2(x - 3)(x + 1) = 0$ și $2x^2 - 4x - 6 = 0$.

Stabiliți dacă ele sînt echivalente.

Rezolvare:

DVA al ambelor ecuații este \mathbb{R} . $2(x - 3)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ sau $x = -1$. $S_1 = \{-1, 3\}$.

Mulțimea soluțiilor ecuației $2x^2 - 4x - 6 = 0$ este $S_2 = \{-1, 3\}$.

Deci, $2(x - 3)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0$, deoarece mulțimile soluțiilor lor sînt egale:
 $S_1 = S_2 = \{-1, 3\}$.

Definiție

Egalitatea de forma $A(x) = B(x)$, unde $A(x)$, $B(x)$ sînt expresii în care apare necunoscuta x , se numește **ecuație cu necunoscuta x** .

Observație. Ecuația poate fi cu mai multe necunoscute. De exemplu, $5x - 3y = 3$ este o ecuație cu două necunoscute, $3u + 2v - 5t = 0$ este o ecuație cu trei necunoscute.

Definiție

Valoarea necunoscutei care transformă ecuația într-o propoziție adevărată se numește **soluție** a ecuației.

Mulțimea soluțiilor ecuației se notează cu S .

A rezolva o ecuație înseamnă a determina mulțimea soluțiilor ei.

O ecuație poate avea o mulțime finită sau infinită de soluții sau poate să nu aibă soluții.

Observație. Rezolvarea unei ecuații începe, de regulă, cu determinarea domeniului valorilor admisibile al acesteia.

Definiție

Mulțimea valorilor necunoscutei (necunoscutelor) pentru care au sens toate expresiile din ecuație se numește **domeniul valorilor admisibile (DVA)** al ecuației.

Definiție

Două ecuații cu aceeași necunoscută (aceleași necunoscute) se numesc **echivalente** dacă mulțimile soluțiilor lor sînt egale.

Între ecuațiile echivalente se scrie simbolul „ \Leftrightarrow ”.

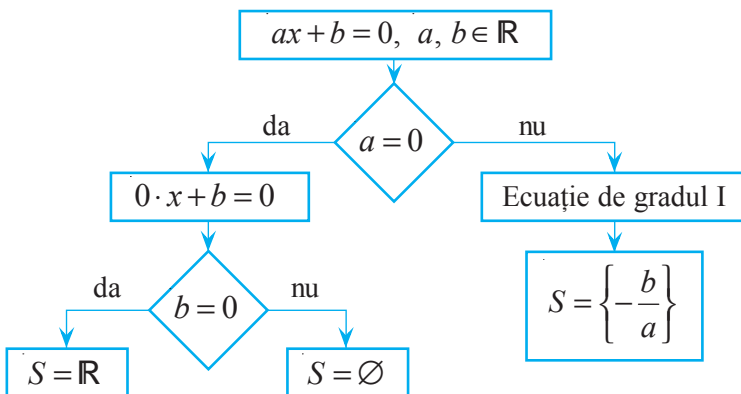
Observație. Ecuațiile echivalente ce se rezolvă într-o mulțime (de regulă, în DVA al ecuației inițiale) se numesc **echivalente în această mulțime**.

1.2. Ecuații de gradul I cu o necunoscută

• Aplicînd următoarele relații de echivalență, bazate pe proprietăți ale relației de egalitate în mulțimea numerelor reale, obținem ecuații echivalente:

1. $A(x) = B(x) \Leftrightarrow B(x) = A(x)$.
2. $A(x) = B(x) \Leftrightarrow A(x) \pm C(x) = B(x) \pm C(x)$, unde expresia $C(x)$ are sens pentru orice $x \in \text{DVA}$ al ecuației inițiale.
3. $A(x) = B(x) \Leftrightarrow A(x) \cdot C(x) = B(x) \cdot C(x)$, unde expresia $C(x)$ are sens și $C(x) \neq 0$ pentru orice $x \in \text{DVA}$ al ecuației inițiale.
4. $A(x) = B(x) \Leftrightarrow \frac{A(x)}{C(x)} = \frac{B(x)}{C(x)}$, unde expresia $C(x)$ are sens și $C(x) \neq 0$ pentru orice $x \in \text{DVA}$ al ecuației inițiale.

Schema rezolvării ecuației de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$



Definiții

- ◆ Ecuația de forma $ax+b=0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se numește **ecuație de gradul I cu o necunoscută**.
- ◆ a, b se numesc **coeficienții ecuației**.

Ecuația de gradul I cu o necunoscută are **soluția unică** numărul $-\frac{b}{a}$. Deci, $S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$.

1.3. Ecuații reductibile la ecuația de gradul I cu o necunoscută

Unele ecuații pot fi reduse la ecuații de gradul I cu o necunoscută cu ajutorul unor substituții sau aplicând relațiile de echivalență.

Exemplu

Rezolvați în \mathbb{R} ecuația: a) $x^2 - 2x + 3 = x(x+2) - 5$; b) $\frac{2x}{x+3} = \frac{5x}{x+3} - 9$.

Rezolvare:

a) DVA: $x^2 - 2x + 3 = x(x+2) - 5 \Leftrightarrow$	\longrightarrow	desfacem parantezele
$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = x^2 + 2x - 5 \Leftrightarrow$	\longrightarrow	aplicăm relația de echivalență 2
$\Leftrightarrow -4x = -8 \mid :(-4) \Leftrightarrow$	\longrightarrow	aplicăm relația de echivalență 4
$\Leftrightarrow x = 2.$		

Răspuns: $S = \{2\}$.

b) DVA: $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Notînd $\frac{x}{x+3} = t$, obținem ecuația de gradul I

$$2t = 5t - 9 \Leftrightarrow 3t - 9 = 0$$

cu necunoscuta t , care are soluția 3. Revenind la necunoscuta x , obținem în DVA:

$$\frac{x}{x+3} = 3 \Leftrightarrow x = 3(x+3) \Leftrightarrow x = -4,5.$$

Cercetăm dacă soluția obținută aparține DVA: $-4,5 \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$; deci, $-4,5 \in \text{DVA}$.

Răspuns: $S = \{-4,5\}$.

1.4. Ecuații de gradul I cu o necunoscută, cu parametru (opțional)

Ecuațiile de gradul I cu o necunoscută pot conține *parametru*. În acest caz, este necesară o discuție asupra existenței soluțiilor ecuației în funcție de valorile parametrului.

Exemplu

Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $mx - 3 = 2x + 5m$, unde m este un parametru real.

Rezolvare:

DVA: \mathbb{R} . $mx - 3 = 2x + 5m \Leftrightarrow x(m - 2) = 5m + 3 \Leftrightarrow (m - 2)x = 5m + 3.$

◆ Dacă $m = 2$, ecuația devine $0 \cdot x = 13$. Deci, ecuația nu are soluții.

◆ Dacă $m \neq 2$ ($m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$), obținem $x = \frac{5m+3}{m-2}$.

Răspuns: Pentru $m = 2$, $S = \emptyset$; pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $S = \left\{ \frac{5m+3}{m-2} \right\}$.

Exerciții și probleme

■ Fixăm cunoștințele

1. Recunoașteți ecuațiile de gradul I:

- a) $2x - 1 = 0$; b) $3(x - 1) = 5$; c) $\frac{1}{x-1} = 2$; d) $x^2 - x = 0$;
 e) $3x = 0$; f) $6x = -4$; g) $2x + \frac{1}{x} + 3 = 0$; h) $-\sqrt{5}x + 2,5 = 0$.

2. Determinați care dintre elementele mulțimii $\{-2; -1; 0; 1,5; 5\}$ este soluție a ecuației:

- a) $3x - 2 = x - 6$; b) $\frac{x+1}{x} = 1$; c) $(x+2)(x-5) = 0$;
 d) $x(x+1,5) = 0$; e) $\frac{2x-1}{x-2} = 2$; f) $x(x+1,5)(x-5) = 0$.

3. Aflați DVA al ecuației:

- a) $2(x-5) - 4 = 5x + 1$; b) $\frac{3}{x-5} = 4$; c) $x(x+3) = 0$.

4. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

- a) $2x - 1 = 0$; b) $-\frac{3}{4}x = \frac{1}{5}$; c) $0,5x + 4 = 0$;
 d) $3 - 2x = 0$; e) $1,4 + 2x = 0$; f) $-\frac{5}{7}x - \frac{1}{3} = 0$.

5. Aflați zeroul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- a) $f(x) = 3x - 1$; b) $f(x) = 2 - 6x$; c) $f(x) = -\sqrt{19}x$; d) $f(x) = \sqrt{5}x - 2\sqrt{5}$.

6. Aflați rădăcinile polinomului:

- a) $P(X) = 3X - 0,5$; b) $P(X) = -8X + \sqrt{8}$; c) $P(X) = -0,3X - 2,8$.

■ Formăm capacitățile și aplicăm

7. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

- a) $2(x-1) + 3(x+2) = 5x + 4$; b) $6 - 3(2-x) + 4x = 7 - x$;
 c) $-1,4(5-x) + 2,5(2+x) = -3,6 + x$; d) $5 + 7(1-x) - 5x = x - 8$.

8. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația cu ajutorul unei substituții:

- a) $\frac{4}{x-5} = 7 - \frac{3}{x-5}$; b) $-\frac{3(x+2)}{x} = \frac{2(x+2)}{x} + 5$;
 c) $\frac{5t}{t+1} = -\frac{1}{2} + \frac{3t}{t+1}$; d) $\frac{0,5a+1,5}{2a} = 9 - \frac{a+3}{a}$.

9. Completați, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

- a) $3(x-1) - 2x = 4 \Leftrightarrow 2x + 5 = \square - x$; b) $4x + 2(1-x) = \square \Leftrightarrow x - 3(x+4) = 5 - 2x$.

10. Determinați legitatea și aflați numărul omis:

$-3(1-z) = 4z - 8$	30	$2z - 3(4-z) = 12 + z$
$2,5)t - \frac{2}{3}(t+1) = 0$?	$\frac{2}{9}(2-t) - 4, (6)t = 6$

11. Determinați legitatea și aflați numărul omis:

$2(5-3x) + 4x = 7 - x$	81	$8 - (3-4x) - x = 17$
$9\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right) - 5x = 8$?	$14 - 2(x+5) + 3x = 6$

12. Rezolvați în \mathbb{R} ecuațiile și determinați cuvîntul cifrat.

Ecuția	R	A	B	O	V
$3x - 5 = 10$	-5	$\frac{5}{3}$	5	3	$-\frac{5}{3}$
$-x + 6,5 = x + 0,5$	3	7	0	$\frac{7}{2}$	$-\frac{7}{2}$
$12 - x = 3(x - 4)$	0	6	12	-6	-3
$\sqrt{3} \cdot x = 0$	$-\sqrt{3}$	2	1	$\sqrt{3}$	0
$x^2 - 2 = x(x - 0,2)$	2	0,2	-10	10	1

Dezvoltăm capacitățile și creăm

13. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

- a) $(3x - 1)^2 - 4(5x + 6) = 9(x^2 - x + 1) + 2$; b) $\frac{1}{2}(1 - 5x) + 4(x^2 - 4) - \frac{3}{4} = \frac{5}{8}(2 - x) + 4x^2 - 3x$;
 c) $2x^3 - x + 3 = 5(x + \frac{2}{5}x^3 - 2) - 4x$; d) $3x(x^2 - x + 1) - 4x = 5x^2 + 2(1 - x^2) + 3x^3 - x$;
 e) $(4x - 1)(4x + 1) - 5x = -4(x - 4x^2) - 7(x + 3)$.

14. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

- a) $|x| = 2x + 1$; b) $|2 - x| = -0,5x + 4$; c) $|2x + 1| = -x$; d) $\frac{2}{3}|5t - 1| = \frac{1}{3}t + 2$.

15. Știind că m este un parametru real, rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

- a) $mx - 6 = 3x + 4$; b) $3 - mx = 2m(x + 1) - 1$;
 c) $mx + m + 3 = x + 4$; d) $2(mx + x) - 3(x + 4) = 5 - m$.

16. Formulați un exercițiu asemănător cu exercițiul 12 și propuneți-l colegilor.

§ 2. Ecuatii de gradul II cu o necunoscută

2.1. Formula de rezolvare

1 Un teren de forma unui triunghi dreptunghic trebuie îngrădit. Se știe că lungimea uneia dintre catetele triunghiului este cu 5 m mai mică decât lungimea ipotenuzei, iar lungimea celeilalte catete este cu 3 m mai mică decât lungimea primei catete. Aflați lungimea gardului.

Rezolvare:

Fie x lungimea ipotenuzei. Atunci $(x - 5)$ este lungimea unei catete, iar $(x - 8)$ – lungimea celeilalte catete. Conform condiției problemei și teoremei lui Pitagora, obținem ecuația $(x - 5)^2 + (x - 8)^2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 26x + 89 = 0$, cu soluțiile $x_1 = 13 - 4\sqrt{5}$, $x_2 = 13 + 4\sqrt{5}$.

Constatăm că numai $13 + 4\sqrt{5}$ satisface condiția problemei. (Precizați de ce $13 - 4\sqrt{5}$ nu satisface condiția problemei.) Deci, lungimea ipotenuzei este de $(13 + 4\sqrt{5})$ cm. Atunci lungimile catetelor sînt de $(5 + 4\sqrt{5})$ m și $(8 + 4\sqrt{5})$ m. Deci, gardul are lungimea de $(26 + 12\sqrt{5})$ m.

Răspuns: $(26 + 12\sqrt{5})$ m.

Ecuția $x^2 - 26x + 89 = 0$ este o ecuație de gradul II cu o necunoscută.

NE AMINTIM

Definiții

- ◆ Ecuția de forma $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se numește **ecuație de gradul II cu necunoscuta x** .
- ◆ Numerele a, b, c se numesc **coeficienții ecuației de gradul II**; c se mai numește **termenul liber**.

Mulțimea soluțiilor ecuației se notează cu S .

A rezolva o ecuație înseamnă a determina mulțimea soluțiilor ei.

I. Cazuri particulare ale ecuației de gradul II

1. $a \neq 0, b \neq 0, c = 0$	2. $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$	3. $a \neq 0, b = 0, c = 0$
$ax^2 + bx = 0$ $ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x(ax + b) = 0.$ $S = \left\{ 0, -\frac{b}{a} \right\}.$	$ax^2 + c = 0$ $S = \emptyset$, dacă $a \cdot c > 0$; $S = \left\{ -\sqrt{-\frac{c}{a}}, \sqrt{-\frac{c}{a}} \right\}$, dacă $a \cdot c < 0$.	$ax^2 = 0$ $ax^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = 0.$ $S = \{0\}.$

APLICĂM

• Rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

- a) $-x^2 + 0,5x = 0$; b) $\sqrt{2}x^2 + 1 = 0$; c) $-2x^2 + 5 = 0$; d) $\sqrt{5}x^2 = 0$.

Rezolvare:

a) $-x^2 + 0,5x = 0 \Leftrightarrow x(x - 0,5) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ sau $x = 0,5$. *Răspuns:* $S = \{0; 0,5\}$.

b) $\sqrt{2}x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x^2 = -1$. *Răspuns:* $S = \emptyset$.

c) $-2x^2 + 5 = 0 \mid \cdot (-1) \Leftrightarrow \square \Leftrightarrow x = \square$ sau $x = \square$. *Răspuns:* $S = \square$.

d) $\sqrt{5}x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \square$. *Răspuns:* $S = \square$.

Observație. Împărțind coeficienții oricărei ecuații de gradul II $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, la coeficientul a , obținem ecuația echivalentă $x^2 + px + q = 0$, numită **ecuație de gradul II, forma redusă**, unde $p = \frac{b}{a}$, iar $q = \frac{c}{a}$.

II. Cazul general: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

Existența și numărul soluțiilor reale ale ecuației de gradul II sau ale ecuației de gradul II, forma redusă, depind de semnul discriminantului $\Delta = b^2 - 4ac$, respectiv $\Delta_1 = \frac{p^2}{4} - q$.

$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$	$x^2 + px + q = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta_1 = \frac{p^2}{4} - q$
$\Delta > 0$ $\Delta < 0$ $\Delta = 0$	$\Delta_1 > 0$ $\Delta_1 < 0$ $\Delta_1 = 0$
$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\Delta_1}$ $x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\Delta_1}$
Nu are soluții în \mathbb{R} .	Nu are soluții în \mathbb{R} .
$x = -\frac{b}{2a}$	$x = -\frac{p}{2}$
$S = \left\{ \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$	$S = \left\{ -\frac{p}{2} \mp \sqrt{\Delta_1} \right\}$
$S = \emptyset$	$S = \emptyset$
$S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$	$S = \left\{ -\frac{p}{2} \right\}$

APLICĂM

• Rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

a) $2x^2 - 3x - 2 = 0$; b) $x^2 - 11x + 30 = 0$.

Rezolvare:

a) DVA: \mathbb{R} . $\Delta = b^2 - 4ac = 25$.

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2}; \quad x_2 = \frac{3 + \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = 2.$$

Răspuns: $S = \{-0,5; 2\}$.

b) DVA: \mathbb{R} . $\Delta_1 = \frac{p^2}{4} - q = \frac{1}{4}$.

$$x_1 = \square - \square = \square; \quad x_2 = \square + \square = \square.$$

Răspuns: $S = \{5, 6\}$.

Observație. În cazul în care coeficientul b este un număr par, adică $b = 2k$, $k \in \mathbb{Z}^*$, ecuația de gradul II ia forma $ax^2 + 2kx + c = 0$, $a \neq 0$. Discriminantul acestei ecuații este

$$\Delta = (2k)^2 - 4ac = 4(k^2 - ac)$$

și formulele de rezolvare devin: $x_1 = \frac{-k - \sqrt{k^2 - ac}}{a}$, $x_2 = \frac{-k + \sqrt{k^2 - ac}}{a}$.

APLICĂM

• Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $2x^2 - 8x + 3 = 0$.

Rezolvare:

DVA: \mathbb{R} . Știind că $a = 2$, $c = 3$, $b = -8 = 2 \cdot (-4)$, obținem:

$$k = -4, \quad \Delta_1 = k^2 - ac = 16 - 6 = 10.$$

Atunci $x_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{10}}{2} = 2 - 0,5\sqrt{10}$, $x_2 = \frac{\square + \sqrt{\square}}{2} = \square + \square$.

Răspuns: $S = \{2 - 0,5\sqrt{10}, 2 + 0,5\sqrt{10}\}$.

2.2. Relații între soluții și coeficienți

NE AMINTIM

Teorema lui Viète

Fie ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. (1)

Dacă numerele reale x_1 și x_2 sînt soluțiile ecuației (1), atunci:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases} \quad (2)$$

Fie ecuația $x^2 + px + q = 0$. (3)

Dacă numerele reale x_1 și x_2 sînt soluțiile ecuației (3), atunci:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases} \quad (4)$$

Folosind relațiile lui Viète (2), (4), soluțiile unor ecuații de gradul II cu o necunoscută pot fi determinate fără a rezolva efectiv ecuația.

APLICĂM

• Rezolvați în \mathbb{R} ecuația: a) $2x^2 - 3x - 2 = 0$; b) $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Rezolvare:

a) Aflăm două numere reale x_1, x_2 , astfel încît $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -1$ și $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$.

Prin încercări, obținem $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 2$.

Răspuns: $S = \{-\frac{1}{2}, 2\}$.

b) Aflăm două numere reale x_1, x_2 , astfel încît $x_1 \cdot x_2 = q = \blacksquare$ și $x_1 + x_2 = -p = \blacksquare$.

Prin încercări, obținem $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.

Răspuns: $S = \{3, 4\}$.

NE AMINTIM

Reciproca teoremei lui Viète

Dacă numerele reale x_1 și x_2 verifică relațiile (2), atunci x_1, x_2 sînt soluțiile ecuației (1).

Dacă numerele reale x_1 și x_2 verifică relațiile (4), atunci x_1, x_2 sînt soluțiile ecuației (3).

Observație. Folosind reciproca teoremei lui Viète, dacă se cunosc soluțiile x_1 și x_2 , poate fi formată o ecuație de gradul II cu o necunoscută.

APLICĂM

• Scrieți o ecuație de gradul II cu o necunoscută care are soluțiile $x_1 = -5$, $x_2 = 2$.

Rezolvare:

Cum $-5 + 2 = -3 = -p$ și $(-5) \cdot 2 = -10 = q$, obținem ecuația $x^2 + 3x - 10 = 0$.

2.3. Ecuatii reducibile la ecuația de gradul II cu o necunoscută

Unele ecuații mai complicate pot fi reduse la ecuații de gradul II prin introducerea unei necunoscute auxiliare.

De exemplu, ecuațiile de forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, $a \neq 0$, numite **ecuații bipătrate**, se rezolvă efectuând substituția $x^2 = t$, unde $t \geq 0$. În consecință, obținem ecuația de gradul II $at^2 + bt + c = 0$, $a \neq 0$. Revenind apoi la necunoscuta x , obținem soluțiile ecuației inițiale.

APLICĂM

• Rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

a) $2x^4 - x^2 - 1 = 0$; b) $(x^2 - 3x)^2 + 3(x^2 - 3x) - 28 = 0$.

Rezolvare:

a) DVA: \mathbb{R} . Fie $x^2 = t$, $t \geq 0$. Obținem ecuația $2t^2 - t - 1 = 0$, cu soluțiile $t_1 = -\frac{1}{2}$, $t_2 = 1$.

Ecuația $x^2 = -\frac{1}{2}$ nu are soluții reale, iar soluțiile ecuației $x^2 = 1$ sînt $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Răspuns: $S = \{-1, 1\}$.

b) DVA: \mathbb{R} . Notăm $x^2 - 3x = z$. Obținem ecuația de gradul II $z^2 + 3z - 28 = 0$, cu soluțiile $z_1 = -7$, $z_2 = 4$. Revenind la necunoscuta x , obținem ecuațiile $x^2 - 3x = -7$ și $x^2 - 3x = 4$.

Ecuația $x^2 - 3x + 7 = 0$ nu are soluții reale.

Ecuația $x^2 - 3x - 4 = 0$ are soluțiile $x_1 = -1$, $x_2 = 4$.

Răspuns: $S = \{-1, 4\}$.

2.4. Descompunerea în factori a expresiilor de forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

NE AMINTIM

Dacă $a \neq 0$ și $\Delta \geq 0$, atunci $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ (5), unde x_1 și x_2 sînt soluțiile reale ale ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

APLICĂM

• Descompuneți în factori expresia $2x^2 - 3x - 2$.

Rezolvare:

Ecuația $2x^2 - 3x - 2 = 0$ are soluțiile $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 2$.

Prin urmare, $2x^2 - 3x - 2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 2) = (2x + 1)(x - 2)$.

2.5. Ecuatii de gradul II cu o necunoscută, cu parametru (opțional)

Ecuațiile de gradul II cu o necunoscută pot conține *parametru*. În acest caz, este necesară o discuție asupra existenței soluției ecuației în funcție de valorile parametrului.

• Determinați valorile parametrului real m pentru care ecuațiile $x^2 + mx + 4 = 0$ și $x^2 + 4x + m = 0$ au o soluție reală comună.

Rezolvare:

Fie x_1 soluția comună. Substituind $x = x_1$, obținem $x_1^2 + mx_1 + 4 = 0$ și $x_1^2 + 4x_1 + m = 0$. Prin scădere, obținem $x_1(m - 4) + 4 - m = 0 \Leftrightarrow (m - 4)x_1 = m - 4$.

Pentru $m = 4$ ecuațiile devin identice: $x_1^2 + 4x_1 + 4 = 0$. Soluția lor comună este $x_1 = -2$.

Pentru $m \neq 4$ obținem $x_1 = 1$. Înlocuind $x_1 = 1$ în una dintre ecuații, obținem $m = -5$.

Atunci ecuațiile devin $x^2 - 5x + 4 = 0$ și $x^2 + 4x - 5 = 0$, cu soluțiile $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ și respectiv $x_3 = 1$, $x_4 = -5$.

Răspuns: Pentru $m = 4$ ecuațiile au soluția comună $x = -2$, iar pentru $m = -5$ soluția lor comună este $x = 1$.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Fie ecuațiile:

a) $5x^2 - x^2 - \sqrt{2} = 0$; b) $3,4x^2 - x + 1 - \sqrt{2} = 0$; c) $(1 - \sqrt{3})x^2 + 7x - 3,5 = 0$.

Găsiți numărul care lipsește:

a) 5; ; $-\sqrt{2}$; b) $-3,4$; -1 ; ; c) ; 7 ; $-3,5$.

2. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

a) $x^2 - 16 = 0$; b) $t^2 - 25 = 0$; c) $5x^2 + 2x = 0$; d) $2x^2 - x = 0$;
e) $\sqrt{3}x^2 + 5 = 0$; f) $2x^2 + 14 = 0$; g) $\frac{1}{3}x^2 = 0$; h) $\sqrt{3}x^2 = 0$.

3. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

a) $4x^2 + 4x + 1 = 0$; b) $5x^2 - 7x + 2 = 0$; c) $3x^2 - 2x + 1 = 0$;
d) $-4x^2 + 6x - 5 = 0$; e) $0,1x^2 - x - 2,5 = 0$; f) $\sqrt{5}x^2 + \sqrt{2}x + 4 = 0$.

4. Rezolvați în \mathbb{Z} ecuația de gradul II, forma redusă:

a) $x^2 - 2x + 1 = 0$; b) $x^2 - 8x + 12 = 0$; c) $x^2 + \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0$;
d) $x^2 + 1\frac{4}{5}x - \frac{2}{5} = 0$; e) $x^2 - 3x - 4 = 0$; f) $x^2 - \sqrt{3}x + 6 = 0$.

5. Fără a rezolva ecuația, determinați semnele soluțiilor acesteia:

a) $3x^2 - x - 2 = 0$; b) $x^2 + x - 12 = 0$; c) $-t^2 + 2t + 8 = 0$; d) $u^2 - 10u + 4 = 0$.

Formăm capacitățile și aplicăm

6. Scrieți o ecuație de gradul II cu soluțiile:

a) 1 și 3; b) -4 și 5; c) -1 și -2 ; d) $\frac{1}{2}$ și $\frac{3}{4}$;
e) -3 și 3; f) 2,5 și 3,5; g) $2 - \sqrt{3}$ și $2 + \sqrt{3}$; h) $-1 - \sqrt{2}$ și $-1 + \sqrt{2}$.

7. Folosind teorema lui Viète, rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

a) $x^2 - 2x - 15 = 0$; b) $3x^2 - x - 2 = 0$; c) $2x^2 + x - 1 = 0$; d) $x^2 - 4x + 5 = 0$.

8. Descompuneți în factori expresia:

a) $x^2 - 2x - 3$; b) $2x^2 - x - 3$; c) $3x^2 + x - 1$;
d) $-3x^2 - 5x - 2$; e) $-x^2 + 3x + 4$; f) $2x^2 - 3x + 1$.

9. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

a) $\frac{x^2 - 5x}{x - 4} = \frac{4}{4 - x}$; b) $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 1} = \frac{1}{1 - x^2}$; c) $\frac{3,5x^2}{x + 2} = \frac{4x + 6}{2 + x}$.

10. Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației:

1) $5x^2 + 3x - 9 = 0$; 2) $-3x^2 - x + 1 = 0$; 3) $2,8x^2 + 2x - 3,5 = 0$.

Fără a rezolva ecuația, calculați:

a) $x_1 + x_2$; b) $x_1 \cdot x_2$; c) $x_1^2 + x_2^2$; d) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$.

11. Aflați două numere pozitive, știind că media lor aritmetică este 12,5, iar media geometrică este 10.

12. Suma unui număr real cu întregul inversului acestuia este 4. Aflați numărul. Găsiți toate soluțiile.

13. Rezolvați în \mathbb{Q} ecuația:

a) $\sqrt{3}x^2 + 4x + \sqrt{3} = 0$; b) $\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{7}x + \sqrt{3} = 0$; c) $(2x + 1)^2 = (4x + 1)^2$;
d) $(1 - 3x)^2 = (x + 2)^2$; e) $5x^2 - 2\sqrt{5}x + 1 = 0$; f) $(x - \sqrt{2})^2 = (2\sqrt{2} + 3x)^2$.

14. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația bipătrată:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; b) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$; c) $a^4 - a^2 - 2 = 0$;
d) $2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$; e) $\frac{5}{3}z^4 + \frac{1}{3}z^2 - 2 = 0$; f) $-t^4 - 7t^2 + 8 = 0$.

15. Rezolvând ecuația, determinați legitatea și aflați numărul omis:

a)	$x^2 + 3x + 2 = 0$	5	b)	$3t^2 + 4t + 1 = 0$	$\frac{8}{9}$
	$x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$?		$2t^2 - 3t - 1 = 0$?

16. Calculați cu aproximație de 0,01 soluțiile ecuației:

a) $2x^2 - x - 1 = 0$; b) $x(x - 4) = 6$; c) $x^2 - 3x + 1 = 0$; d) $3x(x + 1) - 5 = 0$.

17. Rezolvați în \mathbb{Z} ecuația:

a) $x(x - \sqrt{7}) = 0$; b) $4x^2 - 4x + 1 = 0$; c) $\sqrt{11}x^2 = 0$;
d) $-3x^2 + x + 4 = 0$; e) $x^2 - x - 1 = 0$; f) $x^2 - x - 20 = 0$.

18. Rezolvați în \mathbb{R} ecuațiile și ordonați cuvintele de mai jos în funcție de soluțiile nenegative ale ecuațiilor respective (indicate în paranteze). Comentați rezultatul obținut.

1) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$; 2) $2x^2 - x - 1 = 0$; 3) $x^2 - 3x - 10 = 0$;
4) $-8x^2 - 3x + 0,5 = 0$; 5) $x(x + \sqrt{15}) = 0$.

culege $\left(\frac{1}{8}\right)$	seamnă (1)	cine $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	vînt (5)	furtună (0)
-----------------------------------	------------	--	----------	-------------

19. Determinați zerourile funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 3x - x^2$; b) $f(x) = -3x^2 + x + 2$; c) $f(x) = 0, (4)x^2 - 1$; d) $f(x) = 4,5x^2 - 2x - 1$.

20. Aflați rădăcinile reale ale polinomului:

a) $P(X) = -2X^2 + X + 3$; b) $P(X) = 0,1X^2 - X - 20$;
c) $P(X) = 2X^4 - X^2 - 1$; d) $P(X) = 9X^4 - X^2$.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

21. Descompuneți în factori expresia: a) $t^4 + t^2 - 2$; b) $t^4 - t^2 - 2$.

22. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația: a) $x(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 3$; b) $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) = 3$.

23. Folosind metoda substituției, rezolvați în \mathbb{R} ecuația:
 a) $5x^2 + 3|x| - 9 = 0$; b) $2x^2 - 1 = |x|(|x| - 2)$.
24. Formulați exerciții asemănătoare cu exercițiile 15, 17 și propuneți-le colegilor.
- 25*. Aflați valoarea parametrului real m , știind că ecuațiile $2x^2 - 3x + 1 = 0$ și $3x^2 + m(x + 2) + 1 = 0$ au o soluție comună.
- 26*. Știind că m este un parametru real, rezolvați în \mathbb{R} ecuația:
 a) $mx^2 - 3x - 1 = 0$; b) $(m - 2)x^2 + x - 4 = 0$; c) $x^2 - mx + 4 = 0$;
 d) $x^2 + (m - 3)x - 5 = 0$; e) $mx^2 - x - m = 0$; f) $x^2 + mx + 2m = 0$.
27. Alcătuiți o problemă care conduce la rezolvarea ecuației:
 a) $x^2 - 8x - 12 = 0$; b) $3x^2 - 5 = 0$.

§ 3. Ecuații raționale

În ecuațiile a) $3x - 5 = 2(1 - x)$, b) $2x + \frac{3x}{x-1} = x + 1$, c) $1 - \frac{x-1}{x^2-4} = -\frac{2x}{x-2}$,

membrul stâng și membrul drept sînt expresii raționale, adică expresii formate din numere și litere cu ajutorul operațiilor de adunare, scădere, înmulțire și împărțire. Astfel de ecuații sînt numite **ecuații raționale**. În ecuațiile b), c) necunoscuta apare atât la numărătorul, cât și la numitorul raportului algebric respectiv. Atare ecuații se mai numesc **ecuații raționale cu necunoscuta la numitor**.

■ APLICĂM

• Rezolvați în \mathbb{R} ecuația

$$\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{3x}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}.$$

Rezolvare:

DVA: $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

$$\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{3x}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \Leftrightarrow \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{3x}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} = 0.$$

$$3x^2 + 2x - 1 = 0 \text{ și } x^2 - 1 \neq 0.$$

Ecuația $3x^2 + 2x - 1 = 0$ are soluțiile $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

Deoarece $x_1 = -1 \notin \text{DVA}$, această valoare nu poate fi soluție a ecuației date.

$$x_2 = \frac{1}{3} \in \text{DVA}.$$

$$\text{Răspuns: } S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}.$$

Ecuația rațională cu necunoscuta la numitor se rezolvă conform următorului *algoritm*:

- ① Se determină DVA al ecuației.
- ② Se trec toți termenii în membrul stîng al ecuației.
- ③ Se aduce membrul stîng la forma $\frac{A}{B}$.
- ④ Se aplică regula egalării cu zero a unui raport.
- ⑤ Se rezolvă ecuația obținută ($A = 0$).
- ⑥ Se verifică dacă valorile obținute satisfac condițiile precizate, inclusiv dacă aparțin DVA.
- ⑦ Se scrie răspunsul.

Unele ecuații raționale cu necunoscuta la numitor, mai complicate, pot fi reduse la ecuații mai simple prin diverse transformări sau prin introducerea unei necunoscute auxiliare.

APLICĂM

• Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $\frac{2x^2}{x^2-2x+1} + \frac{3x}{x-1} - 2 = 0$.

Rezolvare:

DVA: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, deoarece $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ și ambele rapoarte din membrul stâng nu au sens pentru $x = 1$.

$$\frac{2x^2}{x^2-2x+1} + \frac{3x}{x-1} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2}{(x-1)^2} + \frac{3x}{x-1} - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{x-1}\right) - 2 = 0.$$

Introducem necunoscuta auxiliară t . Fie $\frac{x}{x-1} = t$. Obținem ecuația $2t^2 + 3t - 2 = 0$, cu soluțiile $t_1 = -2$, $t_2 = \frac{1}{2}$. (Verificați!) Revenind la necunoscuta x , obținem ecuațiile

$$\frac{x}{x-1} = -2 \text{ și } \frac{x}{x-1} = \frac{1}{2}.$$

Prima ecuație are soluția $x_1 = \frac{2}{3}$, iar a doua – soluția $x_2 = -1$. (Verificați!)

Valorile $x_1 = \frac{2}{3}$ și $x_2 = -1$ aparțin DVA. Deci, ambele sînt soluții ale ecuației date.

$$\text{Răspuns: } S = \left\{-1, \frac{2}{3}\right\}.$$

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Recunoașteți ecuațiile raționale cu necunoscuta la numitor:

a) $x - 1 = 3$;

b) $x^2 - 3x + 4 = 0$;

c) $\frac{t^2+1}{4} - \frac{t}{3} = \frac{1}{2}$;

d) $\frac{x}{x^2+2} - \frac{1}{x} = 0$;

e) $\frac{2}{t} - \frac{3}{t+1} = 1$;

f) $z^2 - \frac{3}{z} - 2 = 0$.

2. Precizați care dintre elementele mulțimii $\{-1, 0, 1, 5\}$ sînt soluții ale ecuației:

a) $\frac{x^2}{x-5} = \frac{2x-1}{x-5}$;

b) $\frac{x(x+1)}{x^2-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$;

c) $\frac{3}{x} = x - 2$;

d) $\frac{t}{t^2-1} = \frac{t}{t+1}$.

3. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

a) $\frac{1}{x} = 2$;

b) $-\frac{2}{x} = \frac{1}{3}$;

c) $\frac{\sqrt{5}}{2x} = 2,5$;

d) $-\frac{3\sqrt{2}}{7x} = -\frac{1}{7}$.

4. Rezolvați în \mathbb{Q} ecuația:

a) $\frac{2}{x-1} = \frac{3}{4}$;

b) $-\frac{5}{3x-2} = \frac{1}{2}$;

c) $\frac{2x}{1-x} = \frac{2}{5}$;

d) $\frac{3x+2}{x+2} = -\frac{1}{2}$.

5. Rezolvați în \mathbb{Z} ecuația:

a) $\frac{2x-1}{x-1} = \frac{5x^2-1}{x-1}$;

b) $\frac{x^2+2}{2+x} = \frac{2x-1}{x+2}$;

c) $\frac{x(x-1)}{1-3x} = \frac{x^2+4x}{3x-1}$;

d) $\frac{x^2}{x^2+5} = \frac{2x(x-3)}{x^2+5}$.

6. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

a) $\frac{2}{2x-5} - \frac{5}{5-2x} = \frac{4}{7}$;

b) $\frac{3}{x-3} = \frac{1}{x-3} - \frac{2}{3-x}$;

c) $\frac{2x^2}{x^2-16} = \frac{3x}{x+4}$.

Formăm capacitățile și aplicăm

7. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

a) $\frac{x}{x^2 - 6x + 9} = \frac{5x}{x - 3}$;

b) $\frac{x-1}{x-2} = \frac{x}{1-x}$;

c) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{x+3}{1-x^2}$;

d) $\frac{x}{4x^2 - 4x + 1} = -\frac{4x}{2x-1}$.

8. Completați, astfel încât ecuațiile să fie echivalente:

a) $\frac{x^2}{x-1} = \frac{2-3x}{1-x} \Leftrightarrow 2x^2 - \square x + 4 = 0$;

b) $\frac{4}{x^2 - 4} = \frac{1}{x-2} + \frac{2x}{x+2} \Leftrightarrow 5(x - \square)(2x - \square) = 0$.

9. Rezolvați în \mathbb{Q} ecuația:

a) $\frac{0,5}{x+3} = \frac{2}{4x+12}$;

b) $\frac{1,2}{2x-1} = -\frac{6}{5-10x}$;

c) $\frac{2x-1}{x^2 - 8x + 16} = \frac{4x-2}{2(x-4)^2}$.

10. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

a) $\frac{3}{x-5} - \frac{x}{x+1} = \frac{10}{(x+1)(x-5)}$;

b) $\frac{16}{x-2} - \frac{6}{x} = \frac{21}{x+3}$;

c) $\frac{x^2+x}{x-1} + 2x = \frac{3x-1}{x-1} + 2$;

d) $\frac{2}{x^2 - 4} + \frac{x+4}{x(x+2)} = \frac{1}{x(x-2)}$.

11. Aflați valorile reale ale lui t pentru care:

a) suma rapoartelor algebrice $\frac{6t+18}{3t-1}$ și $\frac{4t-26}{2t+5}$ este egală cu 4;

b) diferența rapoartelor algebrice $\frac{3t+1}{1-2t}$ și $\frac{t-1}{t+1}$ este egală cu $\frac{1}{2}$;

c) suma rapoartelor algebrice $\frac{t+1}{t-5}$ și $\frac{10}{t+5}$ este egală cu produsul lor;

d) diferența rapoartelor algebrice $\frac{6}{2t-1}$ și $-\frac{2}{t-2}$ este egală cu produsul lor.

12. Stabiliți legitatea și determinați ecuația omisă:

$\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = 3\frac{1}{3}$	$x^2 - 36 = 0$
$\frac{5x+7}{x-2} - \frac{2x+21}{x+2} = 8\frac{2}{3}$	$?$

$\frac{2(t-1)}{t+3} + \frac{t+3}{t-3} = 5$	$\frac{x+6}{x-5} = 0$
$\frac{4}{t+3} - \frac{5}{3-t} + 1 = \frac{1}{t-3}$	$?$

13. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

a) $(x^2 - 4)(2x + 5) = 0$; b) $\left(\frac{2+x}{x} - 1\right) \cdot (6x - 5) = 0$; c) $(2x^2 - 3x + 1) \cdot \left(\frac{x}{3x-1} + x\right) = 0$;

d) $\left(\frac{2x}{x+2} + \frac{3}{x-2} + 2\right) \cdot \left(x + 1 - \frac{3}{x+2} + 8\right) = 0$; e) $(5x^2 - 7x + 8) \cdot \left(\frac{2x^2}{x-1} - \frac{5x}{x-1} + 4\right) = 0$.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

14. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

a) $\frac{7}{2x^2 + 4x} + \frac{1}{2x-4} = \frac{2}{4-x^2}$;

b) $\frac{x^2+4}{x^2-4} + \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} = \frac{3x-2}{x^2-4}$;

c) $\frac{1}{t-8} + \frac{1}{t-6} + \frac{1}{t+6} + \frac{1}{t+8} = 0$;

d) $\frac{3x^2 - 12x + 11}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3}$.

15. Știind că m este un parametru real, rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

$$\text{a) } \frac{x-m}{m} = \frac{2m}{x-m};$$

$$\text{b) } \frac{m}{x} + \frac{m-1}{x-1} = 2;$$

$$\text{c) } \frac{x}{m} - 2 = \frac{m-1}{1-x};$$

$$\text{d) } \left| x + \frac{1}{x} - 3 \right| = m - 3.$$

16. Aflați valorile cea mai mică și cea mai mare ale funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (D – domeniul de definiție):

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1};$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 1}.$$

§ 4. Sisteme de ecuații

4.1. Noțiunea de sistem de ecuații

1 Într-un chioșc erau 1305 ziare și reviste. După ce s-au vândut 100 de ziare și 50 de reviste, ziare au rămas de două ori mai multe decât reviste.

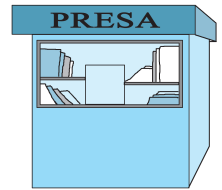
Aflați câte reviste și câte ziare erau la început.

Rezolvare:

Fie x numărul inițial de ziare și y numărul inițial de reviste. Atunci, conform condiției problemei, obținem sistemul de ecuații cu două necunoscute

$$\begin{cases} x + y = 1305, \\ x - 100 = 2(y - 50), \end{cases} \text{ cu soluția } (870, 435). \text{ (Verificați!)}$$

Răspuns: Inițial, în chioșc erau 870 de ziare și 435 de reviste.



GENERALIZĂM

Fie ecuațiile $A_1(x, y) = B_1(x, y)$ și $A_2(x, y) = B_2(x, y)$. Dacă se pune problema să se afle soluțiile lor comune, adică perechile ordonate de numere reale $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ care satisfac ecuația întâi și ecuația a doua, atunci se spune că este dat **un sistem de două**

ecuații cu două necunoscute. El se notează: $\begin{cases} A_1(x, y) = B_1(x, y), \\ A_2(x, y) = B_2(x, y). \end{cases}$

Un sistem poate fi de trei ecuații cu trei necunoscute, de două ecuații cu trei necunoscute etc.

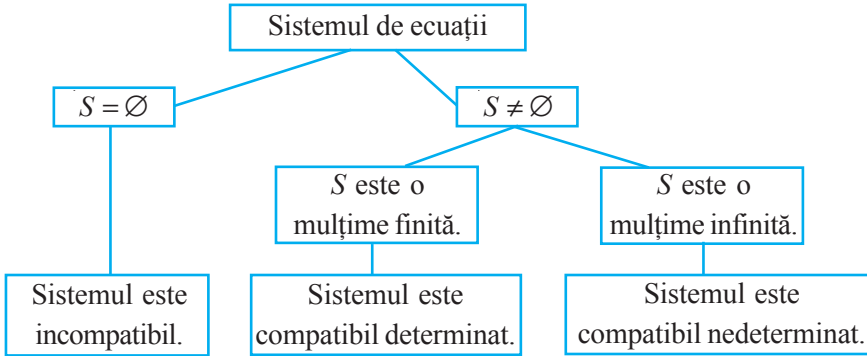
Definiție

Se numește **soluție a sistemului** de două ecuații cu două necunoscute perechea ordonată de numere $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ care este soluție comună pentru **toate** ecuațiile acestuia.

A rezolva un sistem de ecuații înseamnă a determina mulțimea soluțiilor lui.

Mulțimea soluțiilor unui sistem de ecuații (notată cu S) este **intersecția** mulțimilor soluțiilor ecuațiilor acestui sistem.

Relațiile dintre numărul de soluții și tipul sistemului de ecuații



Rezolvarea sistemului de ecuații începe, de regulă, cu determinarea domeniului valorilor admisibile al acestuia.

Domeniul valorilor admisibile (DVA) al unui sistem de ecuații este **intersecția** domeniilor valorilor admisibile ale ecuațiilor sistemului.

Definiție

Două sisteme de ecuații de aceleași necunoscute se numesc **echivalente** dacă mulțimile de soluții ale acestora sînt egale.

Între sistemele de ecuații echivalente se scrie simbolul „ \Leftrightarrow ”.

Observație. Sistemele echivalente ce se rezolvă într-o mulțime (de regulă, în DVA al sistemului inițial) se numesc **echivalente în această mulțime**.

Transformări care pot fi aplicate pentru a obține sisteme echivalente:

Exemple

- Schimbînd ordinea ecuațiilor într-un sistem, obținem un sistem echivalent cu cel dat:

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0, \\ 3x - y = 4. \end{cases}$$
- Înlocuind o ecuație a unui sistem prin altă ecuație, echivalentă cu cea inițială, obținem un sistem echivalent cu cel dat:

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 4x + 7y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 4, \\ 4x + 7y = 0. \end{cases}$$
- Exprimînd într-o ecuație a unui sistem o necunoscută prin cealaltă necunoscută și substituind această expresie în celelalte ecuații ale sistemului, obținem un sistem echivalent cu cel dat:

$$\begin{cases} y = 3x - 4 \\ 8x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 4, \\ 8x + 3x - 4 = 0. \end{cases}$$
- Înlocuind o ecuație a unui sistem cu altă ecuație, care se obține adunînd sau scăzînd două ecuații ale sistemului (înmulțite, dacă e cazul, cu un număr nenul), obținem un sistem echivalent cu cel dat:

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 11x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 4, \\ 14x = 4. \end{cases}$$

4.2. Metode de rezolvare a sistemelor de două ecuații cu două necunoscute

Sistemele de ecuații pot fi rezolvate prin:

◆ **metoda substituției**

$$\begin{cases} x - 3y = -4 \\ x - 7y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 4, \\ 3y - 4 - 7y = 5. \end{cases}$$

⇔ Într-o ecuație a unui sistem o necunoscută se exprimă prin cealaltă necunoscută și expresia obținută se substituie în cealaltă ecuație a sistemului.

◆ **metoda reducerii**

$$\begin{cases} 2x + 0,5y = 2 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases} \begin{matrix} (\times 4) \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} 3x - 2y = -1, \\ 11x = 7. \end{cases}$$

⇔ Se adună (se scad) cele două ecuații ale unui sistem, astfel încât să se reducă una dintre necunoscute.

◆ **metoda utilizării necunoscutelor (necunoscutelor) auxiliare**

$$\begin{cases} x^2 - \frac{1}{y-1} = 3, \\ 4x^2 + \frac{3}{y-1} = -2. \end{cases}$$

⇔ Se introduc necunoscute auxiliare, notând unele expresii cu aceste necunoscute, pentru a obține un sistem mai simplu. Apoi se revine la necunoscutele inițiale.

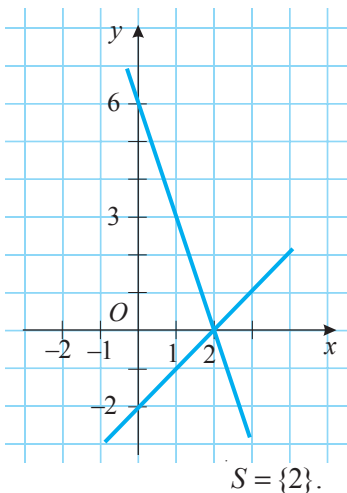
Fie $x^2 = u$, $\frac{1}{y-1} = v$. Atunci

$$\text{obținem sistemul } \begin{cases} u - v = 3, \\ 4u + 3v = -2. \end{cases}$$

◆ **metoda grafică**

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2, \\ y = -3x + 6. \end{cases}$$

⇔ Se trasează, în același sistem de axe ortogonale, graficele ecuațiilor sistemului și se determină (dacă există) coordonatele punctelor de intersecție a acestora. Dacă graficele ecuațiilor sistemului nu se intersectează, rezultă că sistemul este incompatibil, adică $S = \emptyset$.



Observație. Metoda substituției, metoda reducerii, metoda utilizării necunoscutelor (necunoscutelor) auxiliare sînt **metode algebrice**, iar metoda grafică este **metodă geometrică**.

Exerciții și probleme

■ Fixăm cunoștințele

1. Precizați care dintre perechile ordonate $(0, -2)$, $(-1, 1)$, $(0, 2)$, $(-2, 2)$, $(0, 3)$, $(3, 0)$, $(-3, 2)$ sînt soluții ale sistemului:

a) $\begin{cases} 3x - y = -2, \\ 2x + 3y = 6; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 4y = 3, \\ x - y = -2; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x = -2(x + y), \\ 5x + 2y = -4. \end{cases}$

2. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, prin metoda substituției, sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} x - 3y = 0, \\ 5x - y = -1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 6x + 2y = 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 0,2x - 3,5y = 4; \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + y = 2, \\ \frac{2}{5}x - 3y = 10. \end{cases}$

3. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, prin metoda reducerii, sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = -2, \\ 3x + y = 5; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 0,5y - 3x = 4,5, \\ 5x + 2y = 3; \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2,2x + 3y = 2, \\ 3x - 4y = -1; \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y = \frac{1}{6}, \\ 2x + 2y = 3. \end{cases}$

4. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, prin metoda grafică, sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} y = 2x, \\ x - 2y = 9; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ y + 2x = 6; \end{cases}$

c) $\begin{cases} y - 3x = 0, \\ 2x - y = -6; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = -2, \\ 2x - y = 4; \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = 3x + 4, \\ 6x - 2y = 12; \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + y = 0, \\ y = 2x + 1; \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y = 1, \\ 3y = 3 - 3x; \end{cases}$

h) $\begin{cases} y - x = 2, \\ -4x = 12 - 4(y + 1). \end{cases}$

5. Completați cu un număr real, astfel încît sistemul să fie compatibil:

1) nedeterminat;

2) determinat.

a) $\begin{cases} 2x - \square y = -4, \\ 10x - 6y = -20; \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + 2y = -3, \\ \square x - 6y = 9; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y = -1, \\ -12x + 4y = \square. \end{cases}$

■ Formăm capacitățile și aplicăm

6. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} 3(x - 2) = y - 5, \\ 4x - 3(y + 1) = 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 0,5x - 3,4(5 - y) = 4,7, \\ -4x + 8y = 12; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - x = (x + 1)^2 + y, \\ -5x - 2y = 1; \end{cases}$

d) $\begin{cases} u - 2\left(v - 4\frac{1}{3}\right) = 2\frac{1}{4}, \\ \frac{3}{4}u + \frac{1}{2}v = 2; \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x - \sqrt{5}y = 2\sqrt{5}, \\ 7x - y = 10; \end{cases}$

f) $\begin{cases} u + v = 6(u - v), \\ 4, (5)u - 0, (32)v = 0. \end{cases}$

7. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, prin metoda grafică și cea algebrică, sistemul:

a) $\begin{cases} 6 - x = 2y, \\ 2x + 4y = 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x - 2)^2 = x^2 + y, \\ y + 3x = 6; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 3y = 6, \\ 5(x - 1) + 6(y + 2) = 48; \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x - 3y = -7, \\ x^2 + y = (x - 1)^2 + 2. \end{cases}$

8. Determinați legitatea și aflați numărul omis:

$$\begin{cases} 6x - 10y = 11, \\ 5y + 7x = 19; \end{cases}$$

2, 82

$$\begin{cases} 2x - 3y = 14, \\ 7y + 5x = 10. \end{cases}$$

?

Dezvoltăm capacitățile și creăm

9. Explicînd modulele, rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

$$\text{a) } \begin{cases} |x| + 3|y| = 5, \\ |x-2| + 2|y-1| = 0; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3|x+3| + |y-4| = 0, \\ |x-6| + 2|y| = 5; \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} |a| + 2|b| = -3, \\ |a^2 - 2| + |b-4| = 0; \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2|z-3| - |y+1| = 2, \\ |z| + |y| = -5. \end{cases}$$

10. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, prin metoda utilizării necunoscutelor auxiliare, sistemul de ecuații:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 4, \\ \frac{5}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{3}{x-1} - \frac{5}{y-1} = -3, \\ \frac{2}{x-1} - \frac{1}{2(y-1)} = 1; \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x^2 - \frac{1}{y-1} = 3, \\ 4x^2 + \frac{3}{y-1} = -2. \end{cases}$$

11. Două motonave, după întâlnire, și-au continuat drumul, una spre sud, iar cealaltă spre apus, și peste 2 ore distanța dintre ele era de 60 km. Aflați viteza fiecărei motonave, dacă se știe că viteza uneia dintre ele este cu 6 km/h mai mare decît a celeilalte.

12. Scrieți un sistem de două ecuații cu două necunoscute, avînd soluțiile:

$$\text{a) } (1, 5) \text{ și } (5, 1); \quad \text{b) } (-1, 0) \text{ și } (1, 2); \quad \text{c) } (1, 0) \text{ și } (3, 2); \quad \text{d) } (-2, -1) \text{ și } (1, 1).$$

13. Unui luntraș, care plutea în amonte, i-a căzut pălăria în apă cînd trecea pe sub un pod. Peste o oră el a observat pierderea, a întors barca și a ajuns pălăria la o distanță de 4 km de pod. Aflați viteza apei.

• Problemă pentru campioni

14. Pentru care valori ale parametrului real a sistemul

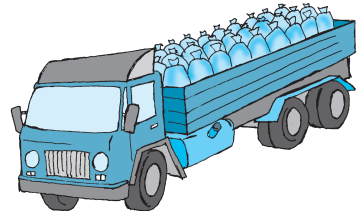
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 10x - ay = 15 \end{cases} \text{ este compatibil nedeterminat?}$$

§ 5. Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor și/sau sistemelor de ecuații

Diverse probleme din matematică, fizică, chimie, economie și din alte domenii se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor, sistemelor de ecuații.

1 Într-un camion s-au încărcat 35 de saci cu făină și cu zahăr. Sacii cîntăresc la un loc 2 t 500 kg. Un sac cu făină cîntărește 80 kg, iar un sac cu zahăr 50 kg.

Aflați cîți saci cu făină și cîți cu zahăr s-au încărcat în camion.



Să rezolvăm această problemă cu ajutorul:
unei ecuații.

Fie x numărul de saci cu făină. Atunci $(35 - x)$ este numărul de saci cu zahăr. Deoarece un sac cu făină cântărește 80 kg, s-au încărcat în total $80x$ kg de făină. Cum un sac cu zahăr cântărește 50 kg, s-au încărcat în total $50(35 - x)$ kg de zahăr.

Conform condiției problemei, obținem ecuația

$$80x + 50(35 - x) = 2500,$$

cu soluția $x = 25$.

Așadar, în camion au fost încărcăți 25 de saci cu făină și 10 saci cu zahăr.

unui sistem de ecuații.

Fie x numărul de saci cu făină, iar y – numărul de saci cu zahăr.

Știind că s-au încărcat în total 35 de saci, obținem prima ecuație: $x + y = 35$.

Deoarece un sac cu făină cântărește 80 kg, iar un sac cu zahăr 50 kg și s-au încărcat în total 2 t 500 kg, obținem a doua ecuație:

$$80x + 50y = 2500 \Leftrightarrow 8x + 5y = 250.$$

Conform condiției problemei, obținem sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y = 35, \\ 8x + 5y = 250, \end{cases}$ cu soluția (25, 10).

Răspuns: În camion s-au încărcat 25 de saci cu făină și 10 saci cu zahăr.

Concluzie. Uneori, o problemă poate fi rezolvată atât cu ajutorul unei ecuații, cât și cu ajutorul unui sistem de ecuații.

NE AMINTIM

Pentru a rezolva o problemă cu ajutorul **ecuației (sistemului de ecuații)**, se procedează astfel:

- ① Se stabilesc datele cunoscute și cele necunoscute ale problemei.
- ② Se notează fiecare mărime necunoscută aleasă cu o literă.
- ③ Se stabilesc relațiile dintre datele cunoscute și cele necunoscute și se scrie ecuația (sistemul de ecuații).
- ④ Se rezolvă ecuația (sistemul de ecuații).
- ⑤ Se analizează rezultatele, se alege soluția și se scrie răspunsul.

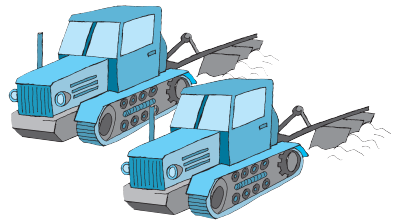
APLICĂM

2 Un tractor ară un lot de pământ. Peste 4 ore, i se alătură un alt tractor. Cele două tractoare termină de arat lotul în 8 ore.

Aflați în câte ore ar putea ara lotul fiecare tractor, dacă se știe că primul tractor i-ar trebui cu 8 ore mai mult decât tractorului al doilea.

Rezolvare:

Fie x numărul de ore în care primul tractor ar fi arat singur lotul de pământ, atunci $(x - 8)$ este numărul de ore în care al doilea tractor ar fi arat singur acest lot. În aceste condiții, productivitatea muncii primului tractor este $\frac{1}{x}$ $\left(\frac{1}{x} - \text{partea din lot arată într-o} \right.$



oră), iar cea a tractorului al doilea este $\frac{1}{x-8}$. Știind că primul tractor a lucrat 12 ore (4 ore singur și 8 ore în comun), iar al doilea a lucrat 8 ore și ținând cont de productivitatea muncii fiecărui tractor, obținem ecuația:

$$\frac{12}{x} + \frac{8}{x-8} = 1.$$

Să aflăm soluțiile ei.

$$\text{DVA: } x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 8\}.$$

$$\frac{12}{x} + \frac{8}{x-8} = 1 \Leftrightarrow \frac{12}{x} + \frac{8}{x-8} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{12(x-8) + 8x - x(x-8)}{x(x-8)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 28x - 96}{x(x-8)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 28x + 96}{x(x-8)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 28x + 96 = 0, \\ x(x-8) \neq 0. \end{cases}$$

Soluțiile sistemului, deci și ale ecuației inițiale, sînt $x_1 = 24$, $x_2 = 4$. (Verificați!) $x_2 = 4$ nu satisface condiția problemei. (Argumentați.)

Răspuns: Primul tractor va ara lotul de pămînt în 24 de ore, al doilea – în 16 ore.

Exercițiu. Rezolvați problema **2** cu ajutorul unui sistem de ecuații.

3 O soluție de alcool cu concentrația de 85% s-a amestecat cu o altă soluție și s-au obținut 10 l de soluție de alcool cu concentrația de 79%.

Aflați cîți litri de fiecare soluție s-au amestecat, dacă concentrația de alcool din soluția a doua este cu 66% mai mare decît volumul în litri al acestei soluții.

Rezolvare:

Fie x volumul în litri al primei soluții. Atunci $(10 - x)$ l este volumul soluției a doua.

Prima soluție conține $\frac{x \cdot 85}{100}$ litri de alcool, iar a doua are concentrația de alcool $(10 - x + 66)\%$.

Obținem ecuația $\frac{(10-x)(76-x)}{100} + \frac{85x}{100} = \frac{10 \cdot 79}{100} \Leftrightarrow x^2 - x - 30 = 0$, cu soluțiile $x_2 = -5$, $x_2 = 6$. (Verificați!) Constatăm că valoarea $x_2 = -5$ nu satisface condiția problemei.

Răspuns: S-au amestecat 6 l de soluție de alcool cu concentrația de 85% cu 4 l de altă soluție.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

Rezolvați problemele 1–4 cu ajutorul ecuației.

- Suma a două numere naturale este 12, iar produsul lor este 11. Aflați aceste numere.
- Diferența a două numere întregi este 15, iar suma pătratelor lor este 725. Aflați aceste numere. Găsiți toate soluțiile.
- Determinați lungimea și lățimea unui dreptunghi, știind că perimetrul lui este de 30 m, iar aria lui – de 44 m^2 .
- Una dintre laturile dreptunghiului este cu 3 cm mai mare decît cealaltă. Aflați lungimea laturilor dreptunghiului, dacă aria lui este de 1720 cm^2 .

Rezolvați problemele 5–6:**a) cu ajutorul ecuației;****b) cu ajutorul sistemului de ecuații.**

5. Cu 6400 lei s-au cumpărat două bucăți de stofă de aceeași lungime, dar de calități diferite. 1 metru de stofă de calitate întâi și 1 metru de stofă de calitate a doua costă în total 320 lei, iar 4 m de stofă de calitate întâi costă cât 6 m de calitate a doua. Determinați cât costă 1 metru de stofă de fiecare calitate și câți metri de stofă s-au cumpărat.
6. Distanța dintre două orașe este de 280 km. Din aceste orașe s-au pornit concomitent, unul spre celălalt, două trenuri: unul cu viteza de 80 km/h, celălalt cu viteza egală cu $\frac{3}{4}$ din viteza primului. Aflați câți kilometri a parcurs fiecare tren până s-au întâlnit.

Formăm capacitățile și aplicăm**Rezolvați problemele 7–13 cu ajutorul ecuației.**

7. Suma pătratelor cifrelor unui număr de două cifre este 52. Dacă din acest număr vom scădea 18, vom obține răsturnatul acestui număr. Aflați numărul.
8. Conform planului, o uzină trebuia să producă 360 de piese. În primele opt zile, uzina a depășit planul zilnic cu 20%. În restul zilelor, uzina a depășit planul zilnic cu 25%. În consecință, uzina a produs cu 82 de piese mai mult decât prevedea planul. În câte zile uzina trebuia să realizeze planul?
9. Aria unui triunghi dreptunghic este de 24 cm^2 . Dacă una dintre catetele lui se micșorează cu 1 cm, iar cealaltă se mărește cu 3 cm, atunci se obține un triunghi cu aria de $27,5 \text{ cm}^2$. Determinați lungimile catetelor triunghiului inițial.
10. Doi muncitori au executat împreună o lucrare în 12 ore. Dacă primul muncitor ar fi executat singur o jumătate din această lucrare, apoi al doilea muncitor – a doua jumătate, atunci toată lucrarea ar fi fost terminată în 25 de ore. Aflați în câte ore ar executa lucrarea fiecare muncitor.
11. Un vapor parcurge distanța pe un râu de la A la B în 3 ore, iar distanța de la B la A – în 4 ore. În câte ore va parcurge distanța de la A la B o plută?
12. Suma a două numere este 8, iar suma inverselor acestor numere este 6. Aflați aceste numere.
13. Fie 736 ml de soluție de iod cu concentrația de 16%. Aflați câți mililitri de alcool trebuie adăugați pentru a obține o soluție de iod cu concentrația de 10%.

Rezolvați problemele 14–15:**a) cu ajutorul ecuației;****b) cu ajutorul sistemului de ecuații.**

14. Suma a două numere este egală cu 122, iar raportul lor este $\frac{3}{7}$. Aflați numerele.
15. 50 de maiouri și 75 de tricouri costă în total 4200 lei. După reducerea cu 10% a prețului maiourilor și cu 20% a prețului tricourilor, pentru acestea s-ar plăti 3487,5 lei. Aflați prețul inițial al maiourilor și al tricourilor.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

16. Câte triunghiuri dreptunghice există, știind că lungimile laturilor lor sînt numere naturale, iar lungimea unei catete este de 15 cm?
17. Aflați două numere naturale, știind că diferența pătratelor lor este 45. Găsiți toate soluțiile.

18. Pentru a transporta 60 t de marfă, e necesar un număr de camioane. Din motiv că drumul era deteriorat, în fiecare camion s-au încărcat cu 0,5 t mai puțin decât se prevedea inițial și, în consecință, au fost repartizate suplimentar 4 camioane. Determinați câte camioane au fost planificate inițial.
19. Un agricultor are două feluri de îngrășămintă chimice de azot: cu concentrația de 15% și 21%. Aflați ce cantitate de îngrășămintă de fiecare fel trebuie să amestece pentru a obține 1 tonă de îngrășămintă de azot cu concentrația de 18%.

- **Problemă pentru campioni** 20. Un câine, fiind în punctul A, urmărește o vulpe, care este în avans cu 30 m față de el. Lungimea saltului câinelui este de 2 m, iar al vulpii – de 1 m. La ce distanță de la punctul A câinele va ajunge vulpea, dacă în timp ce câinele face două salturi, vulpea face trei?

Exerciții și probleme recapitulative

■ Fixăm cunoștințele

1. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

a) $2x - 3,5(x - 4) = 6$;

b) $0,5(x - 2) + 2,3x = 5x - 4$;

c) $\frac{4}{5}(x + 3) - \frac{2}{3} = \frac{5}{7}x + 4$;

d) $2,4(x - 3) - 4x = 1 - x$.

2. Rezolvați în \mathbb{Z} ecuația:

a) $5x^2 - 4x - 1 = 0$;

b) $-1,2x^2 - 7x = 0$;

c) $16x^2 - 1 = 0$;

d) $36x^2 - 12x + 1 = 0$;

e) $x^2 - 3x - 4 = 0$;

f) $3x^2 + 4 = 0$.

3. Folosind teorema lui Viète, rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

a) $x^2 - x - 30 = 0$;

b) $x^2 + x - 30 = 0$;

c) $x^2 - 2x - 120 = 0$;

d) $x^2 - 3x - 180 = 0$;

e) $x^2 + 5x - 150 = 0$;

f) $x^2 + 4x - 32 = 0$.

4. Descompuneți în factori trinomul:

a) $3X^2 - 2X - 1$;

b) $-2X^2 + 5X + 3$;

c) $16X^2 + 8X + 1$.

5. Rezolvați în \mathbb{Q} ecuația:

a) $\frac{5x}{x-1} - \frac{2}{x+2} = 3$;

b) $\frac{2x-1}{x+1} - \frac{5x}{x-1} = -3$;

c) $4 - \frac{2}{x^2-4} = \frac{3x}{x-2}$;

d) $\frac{5x}{x^2-9} - 3 = \frac{1}{x+3}$.

6. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} x - 3y = 4, \\ 5x - 2y = -1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2y - 3x = 6, \\ 8y - 2x = -3; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ \frac{1}{4} + \frac{2}{3}y = 4; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - y = -2, \\ 0,5(x - 2) + y = 8; \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y = 3, \\ 4x - 3y = -2; \end{cases}$

f) $\begin{cases} \sqrt{2}x - y = 8, \\ 2\sqrt{2}x + 3y = -9. \end{cases}$

7. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

a) $(2x^2 - 5x)(7x + 1) = 0$;

b) $\left(\frac{x}{1-x} - 2\right)\left(\frac{1}{x} - x\right) = 0$;

c) $(3x^2 + 2x - 1)(x^2 - 16) = 0$;

d) $\left(\frac{4}{x^2 - 25} - \frac{1}{x - 5}\right)(6x^2 - x - 1) = 0$.

8. Într-un bloc sînt 64 de apartamente – cu 2 camere și cu 4 camere. Știind că blocul are în total 160 de camere, aflați cîte apartamente sînt cu 2 camere și cîte cu 4 camere.
9. Diferența a două numere este egală cu 84, iar raportul lor este $\frac{2}{5}$. Aflați numerele.
10. S-au amestecat 6 kg de bomboane de 33 lei kilogramul cu 12 kg de bomboane de 30 lei kilogramul. Determinați cît costă 1 kg de bomboane asortate.

Formăm capacitățile și aplicăm

11. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

a) $\frac{3x^2}{x^2 - 2x + 1} - \frac{5x}{x - 1} + 2 = 0;$

b) $-\frac{5t^2}{(t+2)^2} + \frac{t}{t+2} + 4 = 0;$

c) $z^4 + 4z^2 - 5 = 0;$

d) $4x^2 + 5x + 1 = 0;$

e) $\frac{2x}{x^2 - 16} - \frac{3}{x + 4} = \frac{5 - x}{x - 4};$

f) $\frac{3}{2x - 1} - \frac{4x}{x + 2} = 5.$

12. Fără a rezolva ecuația, determinați semnele soluțiilor ei:

a) $x^2 - 8x + 3 = 0;$

b) $x^2 + 12x + 8 = 0;$

c) $x^2 - 14x - \sqrt{7} = 0;$

d) $6x^2 - 17x - 23 = 0;$

e) $2t^2 - 19t + 1 = 0;$

f) $x^2 + \sqrt{5}x + 18 = 0.$

13. Fără a rezolva ecuația $x^2 - 8x + 12 = 0$, aflați:

a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2};$

b) $x_1^2 + x_2^2;$

c) $x_1^3 + x_2^3;$

d) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1},$

unde x_1, x_2 sînt soluțiile ecuației date.

14. Descompuneți în factori expresia:

a) $x^{12} - 2x^6 + 1;$

b) $(2x - 1)^4 - 3(2x - 1)^2 + 2;$

c) $3(2 - x)^4 - 2(x - 2)^2 - 1;$

d) $t^4 - 4t^2 + 4.$

15. Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - 8x + 6 = 0$. Scrieți o ecuație de gradul II cu soluțiile:

a) $t_1 = 2x_1$ și $t_2 = 2x_2;$

b) $t_1 = \frac{x_1}{x_2}$ și $t_2 = \frac{x_2}{x_1}.$

16. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} 3(x - 1) + 4 = 5y, \\ x - 8(y + 0,5) = 2; \end{cases}$

b) $\begin{cases} -(x + y) + 4y = 3, \\ 5x - 4(0,2 - y) = -2; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - 4(y + 2) = (x - 5)^2, \\ 3x - y = 0. \end{cases}$

17. Rezolvați, prin metoda grafică, sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 0, \\ x - y = -7; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{2}y = x + 1, \\ y - 2x = -2; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y = 8, \\ 3(x - 1) = 2 + y. \end{cases}$

18. Pe o distanță de 210 km, un tren a mers la început cu viteza de 60 km/h, apoi, din cauza drumului deteriorat, și-a micșorat viteza pînă la 20 km/h. Toată distanța a fost parcursă în 6 ore. Aflați lungimea drumului deteriorat.

19. Se amestecă 2 l de soluție de apă cu sare avînd concentrația de 20% cu 8 l de soluție de apă cu sare avînd concentrația de 30%. Determinați concentrația amestecului.

20. Suma pătratelor a două numere este 36. Împărțind cele două numere, se obține cîtu 5 și restul 3. Aflați numerele. Găsiți toate soluțiile.

21. Stabiliți legitatea și determinați ecuația omisă:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 11 \end{cases} \quad t^2 - 4t - 5 = 0.$$

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases} \quad ?$$

22. Stabiliți legitatea și aflați numărul omis:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 - y^2 = 15 \end{cases} \quad 17$$

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ x^2 - y^2 = 21 \end{cases} \quad ?$$

23. Aflați zerourile funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = -3x^2 - x - 4$; b) $f(x) = -3x^2 + x + 4$; c) $f(x) = x^4 - x^2 - 20$.

24. Doi cicliști au pornit concomitent din localitățile A și B unul spre celălalt. Peste 1 oră, ei s-au întâlnit și, fără să se oprească, și-au continuat drumul. Ciclistul care a pornit din A a ajuns în B cu 95 de minute mai devreme decât celălalt a ajuns în A. Determinați vitezele cicliștilor, dacă distanța dintre A și B este de 28 km.

25. Doi turiști au pornit concomitent din localitățile A și B unul spre celălalt. Fiecare se deplasa cu o viteză constantă și, ajungând în punctul respectiv, s-a întors imediat înapoi. Când s-au reîntâlnit, s-a constatat că un turist a parcurs cu 4 km mai mult decât celălalt și a ajuns în A peste 1 oră după reîntâlnire. Celălalt turist a ajuns în B peste 2 ore 30 de minute după reîntâlnire. Care este viteza fiecărui turist?

Dezvoltăm capacitățile și creăm

24. Determinați semnele soluțiilor de gradul II în funcție de valorile parametrului real m :

a) $x^2 - 3x + m - 1 = 0$; b) $x^2 + (m + 2)x - m + 1 = 0$;
c) $2x^2 - mx + 3(m + 1) = 0$; d) $-3x^2 - (m - 1)x + 4m = 0$.

25. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

a) $|2x^2 - x - 2| = 1$; b) $|x^2 + x - 2| = 1 - x$; c) $|-x^2 + 5x - 6| = x^2$.

26. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} (x - 3y)^2 = 16, \\ x^2 - y^2 = 4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5|x| - 3|y + 2| = -4, \\ 4x^2 - 4|y + 2| = 5; \end{cases}$
c) $\begin{cases} x + y + xy = 8, \\ x^2 + y^2 + xy = 10; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - y = 5, \\ x^2 + y^2 = 3xy - 1. \end{cases}$

27. Mama, tatăl și fiul au împreună 84 de ani. Fiul împreună cu mama au 45 de ani, iar fiul împreună cu tatăl au 52 de ani. Aflați vârsta fiecăruia.

28. Compuneți o problemă care să se rezolve cu ajutorul:

a) ecuației $2x^2 - 3x - 5 = 0$; b) sistemului de ecuații $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 3x - y = 2. \end{cases}$

Test sumativ

Timp efectiv de lucru:
45 de minute



Varianta I

1. Fie ecuația $3t^2 - \blacksquare t + 4 = 0$.
 - a) Completați cu un număr real, astfel încât mulțimea soluțiilor ecuației să conțină două elemente. **2 p**
 - b) Rezolvați în \mathbb{R} ecuația obținută în a). **4 p**
 - c) Scrieți polinomul de gradul doi ale cărui rădăcini sînt opusele soluțiilor obținute în b). **3 p**
2. Rezolvați problema cu ajutorul sistemului de ecuații:
Raportul dintre numărul de băieți și numărul de fete din clasa a IX-a este $\frac{3}{5}$.
 - a) Aflați cîte fete sînt în clasă, dacă se știe că băieții sînt cu 6 mai puțini decît fete. **5 p**
 - b) Aflați cîți elevi învață în clasa a IX-a. **2 p**
3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.
 - a) Determinați valorile a și b pentru care punctele $A(1, 4)$ și $B(-2, 8)$ aparțin graficului funcției f . **5 p**
 - b) Rezolvați pentru $a = 2$ și $b = 3$ în \mathbb{N} ecuația $\frac{f(x)}{x-1} + x = 5$. **5 p**

Varianta II

1. Fie ecuația $2z^2 + \blacksquare z - 5 = 0$.
 - a) Completați cu un număr real, astfel încât mulțimea soluțiilor ecuației să conțină două elemente.
 - b) Rezolvați în \mathbb{R} ecuația obținută în a).
 - c) Scrieți polinomul de gradul doi ale cărui rădăcini sînt opusele soluțiilor obținute în b).
2. Rezolvați problema cu ajutorul sistemului de ecuații:
Raportul dintre numărul de manuale și numărul de cărți de literatură artistică din biblioteca școlii este $\frac{2}{3}$.
 - a) Aflați cîte manuale sînt în bibliotecă, dacă se știe că manuale sînt cu 350 mai puține decît cărți de literatură artistică.
 - b) Aflați cîte cărți sînt în total în biblioteca școlii.
3. Fie funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = mx + n$, $m, n \in \mathbb{R}$.
 - a) Determinați valorile m și n pentru care punctele $A(-2, 1)$ și $B(3, 11)$ aparțin graficului funcției g .
 - b) Rezolvați pentru $m = 3$ și $n = -1$ în \mathbb{N} ecuația $\frac{x^2 + 7}{g(x)} - x = 3$.

Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	26-24	23-22	21-20	19-16	15-12	11-8	7-6	5-4	3-2	1-0

§ 1. Inecuații și sisteme de inecuații de gradul I cu o necunoscută.

Recapitulare și completări

1.1. Noțiunea de inecuație cu o necunoscută

1 Două firme confecționează carnete de elevi la comandă. Firma „BMR” cere 200 lei pentru comandă și câte 10 lei pentru fiecare carnet, iar firma „CAR” cere 50 lei pentru comandă și câte 15 lei pentru fiecare carnet.

Aflați numărul minim de carnete care face mai avantajoasă oferta firmei „BMR”.

Rezolvare:

Fie x numărul de carnete care trebuie confecționate. Conform condiției problemei, firma „BMR” va executa comanda pentru $(200 + 10x)$ lei, iar firma „CAR” – pentru $(50 + 15x)$ lei.

Pentru a răspunde la întrebarea problemei, trebuie să rezolvăm în mulțimea \mathbb{N} inecuația $200 + 10x < 50 + 15x$ și să determinăm din mulțimea soluțiilor ei soluția cea mai mică.

Inecuația $200 + 10x < 50 + 15x$ este un exemplu de inecuație cu o necunoscută.



Definiție

Numărul a se numește **soluție** a inecuației cu o necunoscută, dacă el transformă inecuația într-o inegalitate adevărată.

A rezolva o inecuație înseamnă a determina mulțimea soluțiilor ei.

Mulțimea soluțiilor inecuației se notează cu S .

Două inecuații cu o necunoscută se numesc **echivalente** dacă mulțimile soluțiilor lor sînt egale.










Între două inecuații echivalente se scrie simbolul „ \Leftrightarrow ”.

Aplicînd următoarele relații de echivalență, bazate pe proprietăți ale relației de inegalitate a numerelor reale, obținem inecuații echivalente:

		<i>Exemple</i>
1. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow g(x) < f(x)$	– dacă permutăm membrii unei inecuații, se obține o inecuație de sens opus, echivalentă cu prima:	$x + 3 > 2x \Leftrightarrow 2x < x + 3$
2. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) + a > g(x) + a$	– dacă la ambii membri ai unei inecuații adunăm același număr real, se obține o inecuație de același sens, echivalentă cu cea inițială:	$2x + 5 > 7 \Leftrightarrow 2x > 7 - 5$
3. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow af(x) > ag(x)$ pentru orice $a \in \mathbb{R}, a > 0$	– dacă înmulțim (împărțim) ambii membri ai unei inecuații cu (la) același număr real pozitiv, se obține o inecuație de același sens, echivalentă cu cea inițială:	$3x > 27 \Leftrightarrow x > 27 : 3$
4. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow af(x) < ag(x)$ pentru orice $a \in \mathbb{R}, a < 0$	– dacă înmulțim (împărțim) ambii membri ai unei inecuații cu (la) același număr real negativ, se obține o inecuație de sens opus, echivalentă cu cea inițială:	$-3x < 81 \Leftrightarrow x > 81 : (-3)$

1.2. Intervale de numere reale

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și $a < b$.

Mulțimea	Intervalul de numere reale	
	Se notează	Reprezentarea pe axă
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$	$[a, b)$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$	$(a, b]$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$	(a, b)	
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x > a\}$	$(a, +\infty)$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$	$[a, +\infty)$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < b\}$	$(-\infty, b)$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	
\mathbb{R}	$(-\infty, +\infty)$	

1.3. Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ (\leq , $>$, $<$), $a, b \in \mathbb{R}$

Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Inecuația $ax + b \geq 0$ cu necunoscuta $x \in \mathbb{R}$ poate fi rezolvată astfel:

$$ax + b \geq 0 \Leftrightarrow ax \geq -b.$$

Să examinăm cazurile $a \neq 0$ și $a = 0$.

1) Cazul $a \neq 0$

a) Dacă $a > 0$, atunci $ax \geq -b \Leftrightarrow x \geq -\frac{b}{a}$. Deci, $S = \left[-\frac{b}{a}, +\infty\right)$.

b) Dacă $a < 0$, atunci $ax \geq -b \Leftrightarrow x \leq -\frac{b}{a}$. Deci, $S = \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right]$.

2) Cazul $a = 0$

a) Dacă $a = 0$ și $b > 0$, atunci $S = \mathbb{R}$.

b) Dacă $a = 0$ și $b = 0$, atunci $S = \mathbb{R}$.

c) Dacă $a = 0$ și $b < 0$, atunci $S = \emptyset$.

Exercițiu. Rezolvați în mod analog inecuațiile de forma $ax + b \leq 0$ ($>$, $<$), $a, b \in \mathbb{R}$.

Definiție

Inecuațiile de forma $ax + b < 0$, $ax + b > 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b \geq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se numesc **inecuații de gradul I cu o necunoscută**.

Să rezolvăm inecuația problemei **1**:

$$200 + 10x < 50 + 15x \Leftrightarrow 15x - 10x > 200 - 50 \Leftrightarrow 5x > 150 \Leftrightarrow x > 30.$$

Răspuns: Numărul minim de carnete care face mai avantajoasă oferta firmei „BMR” este 31.

Exercițiu. Precizați proprietățile inegalităților numerelor reale, folosite la rezolvarea acestei inecuații.

APLICĂM

• Rezolvați în \mathbb{R} inecuația:

a) $x - 5 \leq 15x - 2(x + 3)$;

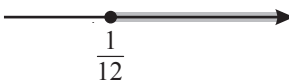
b) $\frac{12x - 1}{3} < 4x + 3$;

c) $\frac{2 - 3x}{3} > \frac{5 - 2x}{2}$;

d) $|2x - 1| < 3$;

e) $|x - 4| \geq 1$.

Rezolvare:

a) $x - 5 \leq 15x - 2(x + 3) \Leftrightarrow x - 5 \leq 15x - 2x - 6 \Leftrightarrow x - 15x + 2x \leq -6 + 5 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -12x \leq -1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{12}$. Deci, 

Răspuns: $S = \left[\frac{1}{12}, +\infty\right)$.

b) $\frac{12x - 1}{3} < 4x + 3 \Leftrightarrow 12x - 1 < 12x + 9 \Leftrightarrow 12x - 12x < 9 + 1 \Leftrightarrow 0 \cdot x < 10$.

Răspuns: $S = \mathbb{R}$.

$$c) \frac{2-3x}{3} > \frac{5-2x}{2} \Leftrightarrow 4-6x > 15-6x \Leftrightarrow 6x-6x > 15-4 \Leftrightarrow 0 \cdot x > 11.$$

Inecuația nu are soluții.

Răspuns: $S = \emptyset$.

$$d) |2x-1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 2x-1 \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2.$$

Răspuns: $S = [-1, 2]$.

$$e) |x-4| > 1 \Leftrightarrow x-4 > 1 \text{ sau } x-4 < -1 \Leftrightarrow x > 5 \text{ sau } x < 3.$$

Răspuns: $S = (-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$.

Observație. Inecuațiile de gradul I pot fi rezolvate studiindu-se semnul funcției respective.

• Rezolvați în \mathbb{R} inecuația $2x+8 < 0$.

Rezolvare:

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x+8$.

Aflăm zeroul funcției f : $2x+8=0 \Leftrightarrow x=-4$.

Tabelul de variație a semnului funcției f este:

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

Deci, $f(x) < 0$ pentru $x \in (-\infty, -4)$ (fig. 1)

Răspuns: $S = (-\infty, -4)$.

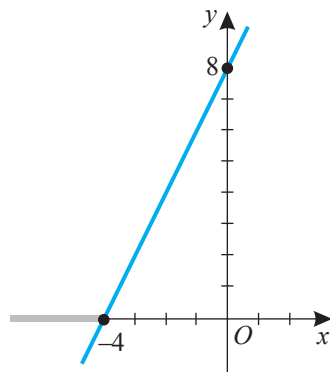


Fig. 1

1.4. Sisteme de inecuații de gradul I cu o necunoscută

2 Pentru a prepara la cantina școlii 20 de porții de felul întâi, sînt necesare 0,5 kg de carne și 1 kg de orez, iar pentru a prepara o porție de felul doi, este nevoie de 0,1 kg de carne și 0,15 kg de orez. Pentru cîți elevi a fost pregătită masa, dacă se știe că s-au folosit mai mult de 11 kg de carne și mai puțin de 18 kg de orez?

Rezolvare:



Fie x numărul de elevi pentru care au fost pregătite bucatele. Atunci s-au folosit $\left(\frac{0,5x}{20} + 0,1x\right)$ kg de carne și $\left(\frac{x}{20} + 0,15x\right)$ kg de orez. Conform condiției problemei, obținem inecuațiile $\frac{0,5x}{20} + 0,1x > 11$ și $\frac{x}{20} + 0,15x < 18$. Astfel, se cere să se afle în mulțimea \mathbb{N} soluțiile comune ale inecuației întâi și ale inecuației a doua. În acest caz, se spune că trebuie să rezolvăm un sistem de două inecuații de gradul I cu o necunoscută:

$$\begin{cases} \frac{0,5x}{20} + 0,1x > 11 \\ \frac{x}{20} + 0,15x < 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4x > 440 \\ x + 3x < 360 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x > 440 \\ 4x < 360 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 88, \\ x < 90. \end{cases}$$

În mulțimea \mathbb{N} acest sistem de inecuații are soluția unică 89.

Răspuns: Au fost pregătite bucate pentru 89 de elevi.

În caz general, **un sistem de două inecuații de gradul I cu o necunoscută** se notează:

$$\begin{cases} a_1x + b_1 \geq 0, & a_1 \in \mathbb{R}^*, & b_1 \in \mathbb{R}, \\ a_2x + b_2 \geq 0, & a_2 \in \mathbb{R}^*, & b_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Definiție

Se numește **soluție** a unui sistem de inecuații de gradul I cu o necunoscută orice valoare a necunoscutei care transformă **fiecare** inecuație a sistemului într-o inegalitate adevărată.

Observații. 1. Un sistem de inecuații poate fi format din inecuații cu oricare dintre semnele „<”, „≤”, „>”, „≥”.

2. Există sisteme de două, de trei sau de mai multe inecuații.

A rezolva un sistem de inecuații înseamnă a determina mulțimea soluțiilor lui.

Mulțimea soluțiilor unui sistem de inecuații (notată cu S) este **intersecția** mulțimilor soluțiilor inecuațiilor acestui sistem.

Definiție

Două sisteme de inecuații se numesc **echivalente** dacă mulțimile soluțiilor lor sînt egale.

Între sistemele de inecuații echivalente se scrie simbolul „ \Leftrightarrow ”.

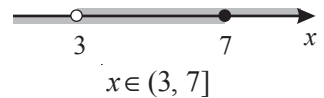
Observație. Sistemele echivalente de inecuații ce se rezolvă pe o mulțime se numesc **echivalente în această mulțime**.

APLICĂM

• Rezolvați în \mathbb{R} sistemul de inecuații $\begin{cases} 3(x-1) \leq 2(x+2), \\ 2x-1 > 5. \end{cases}$

Rezolvare:

$$\begin{cases} 3(x-1) \leq 2(x+2) \\ 2x-1 > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-3 \leq 2x+4 \\ 2x > 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7, \\ x > 3. \end{cases}$$



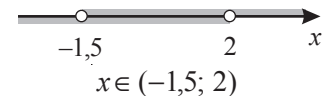
Răspuns: $S = (3, 7]$.

• Rezolvați în \mathbb{R} inecuația dublă $-2 < 2x+1 < 5$.

Rezolvare:

Inecuația poate fi scrisă sub formă de sistem de inecuații:

$$-2 < 2x+1 < 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 > -2 \\ 2x+1 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > -3 \\ 2x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1,5, \\ x < 2. \end{cases}$$

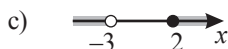
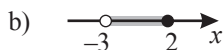


Răspuns: $S = (-1,5; 2)$.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Precizați care desen este reprezentarea pe axă a intervalului $(-3, 2]$:



2. Reprezentați pe axa numerelor și scrieți sub formă de interval de numere reale mulțimea soluțiilor inecuației:

a) $-3 \leq x < -2$; b) $6,5 \leq x \leq 11,5$; c) $2 < x < 4$; d) $x > -2$; e) $x \leq 6$.

3. Rezolvați în \mathbb{R} inecuația:

a) $7x - 5,3 < 8,7$; b) $1 - 3x > 7$; c) $30 + 5x \leq 18 - 7x$;

d) $5(x - 1) + 7 \geq 1 - 3(x + 2)$; e) $x - \frac{2x + 3}{2} \leq \frac{x - 1}{4}$.

4. Rezolvați în \mathbb{N} inecuația:

a) $5,6(x - 3) - 3,2(2 - x) < 20,8$; b) $4,8(x - 4) - 3,7(2 - x) < 24,4$.

5. Rezolvați în \mathbb{R} sistemul de inecuații:


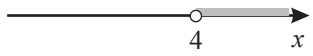
a) $\begin{cases} 2x + 1 > 0, \\ x - 3 < 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 1 - x \leq 0, \\ 3x + 2 < 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 0,5 \geq 0, \\ 2x - 5 \geq 0; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 1,2x - 6 \leq 0, \\ 4x - 3 \leq 0. \end{cases}$

6. Completați tabelul folosind modelul din linia 1:

1	x mai mic sau egal cu șapte	$x \leq 7$	$(-\infty, 7]$	
2	x mai mare sau egal cu doi			
3		$-3 < x < 5$		
4	x mai mic decât 5,4			
5				
6			$(-\sqrt{3}, +\infty)$	

Formăm capacitățile și aplicăm

7. Aflați ce costă mai mult: 7 pixuri sau 10 blocnotesuri, dacă se știe că 2 pixuri costă mai mult decât 3 blocnotesuri.

8. Rezolvați în \mathbb{R} inecuația:

a) $(x - 3)(x + 2) - (x - 3)^2 > 15x - 10$;

b) $(x + 2)^2 - (x + 2)(x - 5) < 14x - 7$;

c) $5(x - 2) - 3 \leq \frac{9(x - 2)}{2} - 3(2x - 4)$;

d) $\frac{3}{2x - 1} > 0$;

e) $\frac{-2}{4x - 12} \leq 0$.

9. Rezolvați în \mathbb{R} sistemul de inecuații:

a) $\begin{cases} 17x - 2 > 12x - 1, \\ 3 - 9x < 1 - x; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 5 \leq 15 - 3x, \\ 1 - 4x > 22 - 3x; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4 - x \geq \frac{x-1}{3}, \\ \frac{7x-1}{8} \geq 6; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5(x+1) \geq 3(x+3) + 1, \\ 2(2x-1) < 7(x+1). \end{cases}$

10. Determinați domeniul de definiție al funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \sqrt{24x - 48}$;

b) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{4-5x}}$;

c) $f(x) = \sqrt{10-x} + \frac{1}{\sqrt{2x-6}}$.

11. Rezolvați în \mathbb{R} inecuația dublă:

a) $-5 < 3 - 2x < 1$;

b) $1 < 3x - 2 < 7$;

c) $-2 \leq 4 - 3x \leq 10$;

d) $3x - 2 < 4x + 1 < 3x + 5$.

12. Pe un raft sînt cu 5 cărți mai multe decît pe altul. Se știe că pe raftul al doilea sînt mai puțin de 11 cărți, iar pe ambele rafturi sînt nu mai puțin de 25 de cărți. Cîte cărți sînt pe ambele rafturi?

13. Segmentele de lungimi 5, 8 și x sînt laturile unui triunghi. Aflați valorile posibile ale necunoscutei x .

14. Un autobuz a făcut într-o zi 8 curse și a transportat mai mult de 187 de pasageri, astfel încît toate locurile au fost ocupate și numai într-o cursă doi pasageri au călătorit în picioare. În ziua următoare, același autobuz a făcut 15 curse și a transportat mai puțin de 367 de pasageri. În total, în această zi, numai trei locuri n-au fost ocupate. Aflați cîte locuri are autobuzul.

15. Determinați legitatea și aflați numărul omis:

$$3x - 1 \geq 5(x + 2) - 3$$

-4

$$2(x + 3) \geq 6x + 4,5$$

?

Dezvoltăm capacitățile și creăm

16. Rezolvați în \mathbb{R} inecuația:

a) $|3x + 2| > 1$;

b) $|6 - 9x| \geq 18$;

c) $|3x + 7| < 5$.

17. Aflați valorile parametrului real a pentru care sistemul de inecuații are cel puțin o soluție reală:

a) $\begin{cases} x < 2, \\ x > a; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x \leq 3, \\ x > a; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \leq -3, \\ x \geq a; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \geq 5, \\ x \leq a. \end{cases}$

18. Determinați valorile parametrului real a , astfel încît sistemul de inecuații să nu aibă soluții:

a) $\begin{cases} x < 3, \\ x > a; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x \leq 2, \\ x > a; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \leq 5, \\ x \geq a; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \geq -2, \\ x \leq a. \end{cases}$

19. Aflați valorile parametrului real a pentru care sistemul de inecuații

$$\begin{cases} 2(a - 3x) < 1 - x \\ 5 - x > 3 + 3(x - a) \end{cases} \text{ are în } \mathbb{R} \text{ cel puțin o soluție reală.}$$

20. Determinați valorile parametrului real a , astfel încît inecuația dublă $-5 \leq x \leq a$ să aibă mulțimea soluțiilor: a) $S = \{-5\}$; b) $S = \emptyset$; c) $S = [-5; a]$.

§ 2. Inecuații de gradul II cu o necunoscută. Metoda intervalelor

2.1. Inecuații de gradul II cu o necunoscută



Atelier. 1. Trasați în diferite sisteme de coordonate graficele funcțiilor:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 4x + 3;$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2 + 4x + 4;$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = -x^2 + 2x - 5.$$

2. Aflați semnele fiecărei funcții f, g, h .

3. Comparați și comentați rezultatele.



INVESTIGĂM

Rezolvați în \mathbb{R} inecuația $x^2 - x - 6 > 0$.

Rezolvare:

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x - 6$.

Aflăm zerourile funcției f :

$$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ sau } x = 3.$$

Reprezentăm schematic graficul funcției f (parabola) într-un sistem de axe ortogonale (fig. 2).

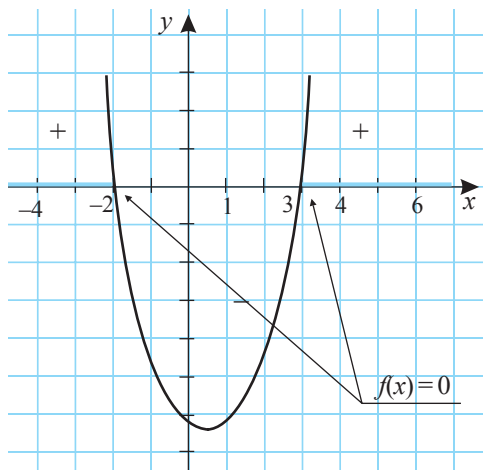


Fig. 2

Folosind graficul, determinăm valorile lui x pentru care $f(x) > 0$. Obținem $x < -2$ sau $x > 3$.

Răspuns: $S = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$.

Definiție

Inecuațiile de forma $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se numesc **inecuații de gradul II cu o necunoscută**.

Numărul m este **o soluție** a unei inecuații cu o necunoscută, dacă prin substituirea necunoscutei cu m în această inecuație se obține o propoziție adevărată.

Inecuații echivalente se obțin aplicând proprietăți ale inegalităților numerelor reale.

Algoritmul de rezolvare a inecuației de gradul II

① Prin transformări echivalente, reprezentăm inecuația sub forma

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad (ax^2 + bx + c < 0, \quad ax^2 + bx + c \geq 0, \quad ax^2 + bx + c \leq 0), \quad a \neq 0.$$

② Examinăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

③ Aflăm zerourile funcției f prin rezolvarea ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

④ Trasăm schematic graficul funcției f .

⑤ Determinăm valorile lui x pentru care $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$).

⑥ Scriem răspunsul sub formă de interval numeric.

APLICĂM

• Rezolvați în \mathbb{R} inecuația $-4x^2 + 4x - 1 \geq 0$.

Rezolvare:

Cercetăm funcția

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = -4x^2 + 4x - 1.$$

Aflăm zerourile funcției f :

$$-4x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Reprezentăm într-un sistem de axe ortogonale graficul funcției f (fig. 3). Cu ajutorul acestui grafic, stabilim că

$f(x) \geq 0$ numai pentru $x = \frac{1}{2}$.

$$\text{Răspuns: } S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

Acest mod de rezolvare a inecuațiilor de gradul II cu o necunoscută se bazează pe proprietăți ale funcției de gradul II.

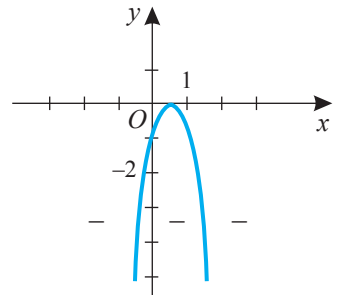
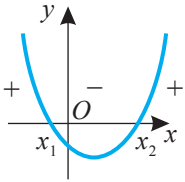
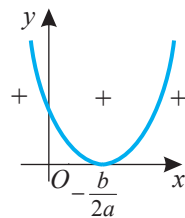
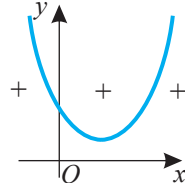
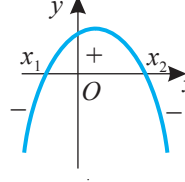
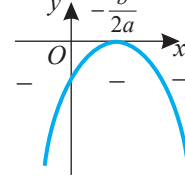
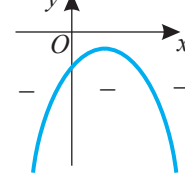


Fig. 3

Studiul inecuațiilor $ax^2 + bx + c > 0$, $a \neq 0$, și $ax^2 + bx + c \geq 0$, $a \neq 0$

Valorile lui		Semnele funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$	Mulțimea soluțiilor inecuației $ax^2 + bx + c > 0$, $a \neq 0$	Mulțimea soluțiilor inecuației $ax^2 + bx + c \geq 0$, $a \neq 0$
a	Δ			
$a > 0$	$\Delta > 0$		$S = (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$	$S = (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$
	$\Delta = 0$		$S = \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right) \cup \left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$	$S = \mathbb{R}$
	$\Delta < 0$		$S = \mathbb{R}$	$S = \mathbb{R}$
$a < 0$	$\Delta > 0$		$S = (x_1, x_2)$	$S = [x_1, x_2]$
	$\Delta = 0$		$S = \emptyset$	$S = -\frac{b}{2a}$
	$\Delta < 0$		$S = \emptyset$	$S = \emptyset$

Observație. Inecuațiile de forma $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, $a \neq 0$, se reduc, prin înmulțirea coeficienților lor cu -1 , la inecuații de forma celor prezentate în tabel.

2.2. Metoda intervalelor



INVESTIGĂM

Rezolvați în \mathbb{R} inecuația $x^2 - 2x - 15 < 0$.

Rezolvare:

Descompunem în factori membrul stâng al inecuației: $x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$.

Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 5$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + 3$. Alcătuim tabelul de variație a semnelor funcțiilor f și g :

x	$-\infty$	-3	5	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x) \cdot g(x)$	$+$	0	$-$	$+$

Din tabel rezultă că pe fiecare dintre intervalele $(-\infty, -3)$, $(-3, 5)$ și $(5, +\infty)$ funcția $f \cdot g$ își păstrează semnul. Se spune că funcția $f \cdot g$, trecând prin punctele -3 și 5 , își schimbă semnul, și anume:



Astfel, am obținut că $x^2 - 2x - 15 < 0$ pentru $x \in (-3, 5)$.

Răspuns: $S = (-3, 5)$.

GENERALIZĂM

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$, unde x_1, x_2, \dots, x_n sînt numere reale distincte.

Zerourile x_1, x_2, \dots, x_n ale funcției f împart domeniul ei de definiție în intervale, astfel încît pe fiecare dintre aceste intervale funcția f își păstrează semnul, iar trecînd prin punctele x_1, x_2, \dots, x_n , această funcție își schimbă semnul.

Schimbarea semnelui funcției f se reprezintă grafic prin „curba semnelor”:



Această reprezentare se interpretează astfel: pe intervalele unde „curba semnelor” e situată deasupra axei numerelor este adevărată inegalitatea $f(x) > 0$, iar pe intervalele unde „curba semnelor” e situată sub axa numerelor este adevărată inegalitatea $f(x) < 0$.

Această metodă de rezolvare a inecuațiilor este numită **metoda intervalelor**.

APLICĂM

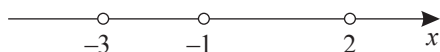
• Rezolvați în \mathbb{R} inecuația $(x - 2)(x + 1)(x + 3) > 0$.

Rezolvare:

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 2)(x + 1)(x + 3)$.

Aflăm zerourile funcției f : $f(x) = 0$ pentru $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.

Reprezentăm pe axa numerelor zerourile funcției f :



Determinăm semnul funcției f pe $(2, +\infty)$. Pentru aceasta, luăm un punct arbitrar din intervalul dat și aflăm semnul funcției f în punctul ales:

$$4 \in (2, +\infty), f(4) = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70 > 0.$$

Prin urmare, $f(x) > 0$ pentru $x \in (2, +\infty)$.

Procedăm similar pentru celelalte intervale și construim „curba semnelor”:



Așadar, $f(x) > 0$ pentru $x \in (-3, -1) \cup (2, +\infty)$.

Răspuns: $S = (-3, -1) \cup (2, +\infty)$.

• Rezolvați în \mathbb{R} inecuația $x(6-x)(x+2) \leq 0$.

Rezolvare:

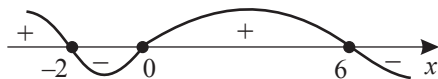
Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x(6-x)(x+2)$. Aflăm zerourile funcției f :

$$f(x) = 0 \text{ pentru } x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 6.$$

Construim „curba semnelor”:

Așadar, $f(x) \leq 0$ pentru $x \in [-2, 0] \cup [6, +\infty)$.

Răspuns: $S = [-2, 0] \cup [6, +\infty)$.



2.3. Inecuații raționale



INVESTIGĂM

Rezolvați în \mathbb{R} inecuația $\frac{2x+6}{x-1} < 0$.

Rezolvare:

$$\frac{2x+6}{x-1} < 0 \Leftrightarrow (2x+6)(x-1) < 0.$$

Fie funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (2x+6)(x-1)$. Avem $g(x) = 0$ pentru $x_1 = -3$, $x_2 = 1$.

Construim „curba semnelor”:



Obținem $g(x) < 0$ pentru $x \in (-3, 1)$.

Răspuns: $S = (-3, 1)$.

Definiție

Inecuațiile de forma $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$, unde

$P(X)$, $Q(X)$ sînt polinoame corespunzătoare numărătorului $P(x)$ și respectiv numitorului $Q(x)$, se numesc **inecuații raționale cu o necunoscută**.

Observație. Inecuația $\frac{2x+6}{x-1} < 0$ poate fi rezolvată și fără a fi înlocuită cu inecuația $(2x+6)(x-1) < 0$, echivalentă ei. Pentru aceasta, cercetăm funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+6}{x-1}$, aflăm zerourile ei (zerourile numărătorului) și zerourile numitorului fracției algebrice corespunzătoare și le reprezentăm pe axa numerelor. Apoi construim „curba semnelor” și selectăm intervalele respective.

La rezolvarea prin metoda intervalelor a inecuațiilor raționale cu o necunoscută la numitor poate fi aplicat următorul *algoritm*:

- ① Efectuăm transformările necesare și scriem inecuația sub forma $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ ($\geq, <, \leq$), unde $P(x)$ și $Q(x)$ sînt polinoame corespunzătoare numărătorului $P(x)$ și respectiv numitorului $Q(x)$.
- ② Aflăm mulțimea D care se obține excluzînd din \mathbb{R} soluțiile ecuației $Q(x) = 0$.
- ③ Definim funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.
- ④ Aflăm zerourile funcției, adică zerourile numărătorului, rezolvînd ecuația $P(x) = 0$.
- ⑤ Reprezentăm pe axa numerelor domeniul D și zerourile funcției f .
- ⑥ Construim „curba semnelor”.
- ⑦ Selectăm intervalele corespunzătoare semnului funcției f .
- ⑧ Scriem răspunsul.

APLICĂM

• Rezolvați în \mathbb{R} inecuația $\frac{5-x}{2x+2} \geq 0$.

Rezolvare:

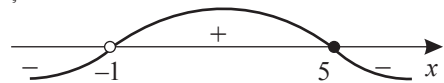
$$2x+2=0 \Leftrightarrow x=-1. \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{5-x}{2x+2}$. Avem $f(x) = 0$ pentru $x = 5$. Ținem cont că 5 este soluție, iar -1 nu este soluție a inecuației.

Construim „curba semnelor”:

Așadar, $f(x) \geq 0$ pentru $x \in (-1, 5]$.

Răspuns: $S = (-1, 5]$.



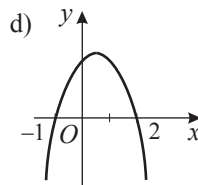
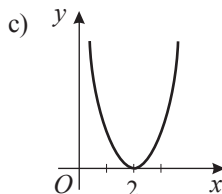
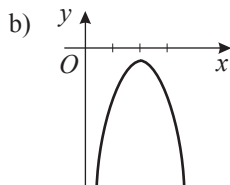
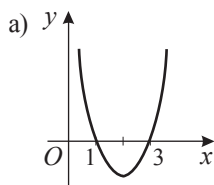
Observații. 1. Valorile pentru care funcția f nu este definită (zerourile numitorului) nu se includ în mulțimea soluțiilor inecuației inițiale (grafic, pe axă ele se reprezintă prin cercelete necolorate).

2. Zerourile funcției f (zerourile numărătorului) nu aparțin mulțimii soluțiilor inecuației date, dacă această inecuație conține semnul „ $>$ ” sau „ $<$ ”. Zerourile funcției f aparțin mulțimii soluțiilor, dacă inecuația inițială conține semnul „ \geq ” sau „ \leq ” (grafic, pe axă ele se reprezintă prin cercelete colorate).

Exerciții și probleme

■ Fixăm cunoștințele

- Precizați dacă sînt echivalente inecuațiile:
 a) $x^2 \leq 1$ și $x \leq 1$; b) $x^2 > 4$ și $x > 2$; c) $(x+3)^2 \geq 0$ și $(x+5)^2 \geq 0$.
- Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, este definită de graficul ei. Determinați, cu ajutorul graficului, mulțimile soluțiilor inecuațiilor $f(x) > 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \leq 0$.



- Rezolvați în \mathbb{R} inecuația:
 a) $6x^2 - 7x + 2 > 0$; b) $-x^2 - 2x + 48 < 0$; c) $8x^2 + 10x - 3 \leq 0$; d) $25x^2 - 10x + 1 > 0$;
 e) $49x^2 - 28x + 4 \leq 0$; f) $4x^2 - 4x + 15 > 0$; g) $7x < x^2$; h) $4x^2 - x < 5$;
 i) $x^2 \geq 16$; j) $9 - x^2 > 0$; k) $16x^2 + 1 \leq 8x$; l) $3x^2 + 27 > 0$.
- Folosind metoda intervalelor, rezolvați în \mathbb{R} inecuația:
 a) $(x+8)(x-5) > 0$; b) $x(x+2) \leq 0$; c) $\frac{x-5}{x+6} < 0$; d) $\frac{x+1}{x+4} \geq 0$; e) $\frac{2x-1}{1-3x} \geq 0$.

■ Formăm capacitățile și aplicăm

- Rezolvați în \mathbb{R} inecuația:
 a) $x(x+5) - 2 > 4x$; b) $(x+4)(x+5) - x \leq 5$;
 c) $(5x+1)(3x-1) > (4x-1)(x+2)$; d) $2x(3x-1) \geq 4x^2 + 5x + 9$.
- Compuneți o inecuație de gradul II cu mulțimea soluțiilor:
 a) $S = \mathbb{R}$; b) $S = \emptyset$; c) $S = [-2, 3]$; d) $S = (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$; e) $S = \{3\}$.
- Rezolvați în \mathbb{R} inecuația:
 a) $3x^2 + 4 \leq 10 - x(x-2)$; b) $(3x-2)^2 \geq 3x(x-1)$;
 c) $\frac{-3}{x^2 + x - 20} \geq 0$; d) $\frac{1}{x^2 + 5x + 7} < 0$.
- Determinați domeniul de definiție al funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:
 a) $f(x) = \sqrt{1-x-2x^2}$; b) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{3x^2+12x}}$.
- Rezolvați în \mathbb{R} inecuația:
 a) $x(x+2)(x-3) < 0$; b) $(2x+1)(3-x)(x+5) \geq 0$; c) $(x-1)(x^2-5x+6) \leq 0$;
 d) $(x^2-3x-4)(x^2+2x) > 0$; e) $\frac{(2x+1)(3-x)}{x^2+4} > 0$; f) $\frac{x^2-x-2}{x} \leq 0$; g) $\frac{x^2-x-6}{x-1} \geq 0$.

■ Dezvoltăm capacitățile și creăm

- Poate fi decupat dintr-o foaie de hîrtie cu dimensiunile de 10 cm și 3 cm un dreptunghi care are lățimea cu 4 cm mai mică decît lungimea și aria mai mare de 21 cm²?
- Rezolvați în \mathbb{R} inecuația: a) $\frac{4x-2}{3x+5} + 4 \leq 0$; b) $3-x \geq \frac{1}{2-x}$; c) $x + \frac{2}{x} > 3$; d) $\frac{7x-5}{x+1} > x$.

12. Rezolvați în \mathbb{Z} sistemul de inecuații $\begin{cases} x^2 - 7x + 6 < 0, \\ 3x^2 - x + 1 \\ x^2 < 36. \end{cases}$
13. Rezolvați în \mathbb{R} sistemul de inecuații:
 a) $\begin{cases} 3x - 12 > 0, \\ -x^2 + 3x + 4 > 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + 5x \leq 0, \\ 7 + x > 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + 4x - 5 > 0, \\ x^2 - 2x - 8 < 0. \end{cases}$
14. Determinați domeniul de definiție al funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:
 a) $f(x) = \sqrt{-x^2 + x + 30} + \frac{1}{x-1}$; b) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 42} + \sqrt{100 - x^2}$.
15. Rezolvați în \mathbb{R} inecuația dublă: a) $-4 \leq x^2 - 5x + 2 \leq -2$; b) $-1 < x^2 + 2x < 3$.
16. Aflați valorile parametrului real m , astfel încât inecuația să fie adevărată pentru orice x real:
 a) $5x^2 - x + m > 0$; b) $mx^2 - 10x - 5 < 0$.
17. Determinați valorile parametrului real a pentru care inecuația nu are soluții:
 a) $x^2 + ax + 1 < 0$; b) $ax^2 + 4ax + 5 \leq 0$.

Exerciții și probleme recapitulative

■ Fixăm cunoștințele

1. Determinați cea mai mare soluție întregă a inecuației:
 a) $x + 2 \geq 2,5x - 1$; b) $x - \frac{x+4}{4} + \frac{3x-1}{2} < 3$.
2. Aflați cel mai mic număr natural ce aparține mulțimii soluțiilor inecuației $3x - 2 < 1,5x + 4$.
3. Rezolvați în \mathbb{R} inecuația: a) $x^2 + 3x + 2 > 0$; b) $2x < x^2$; c) $4x^2 < 1$;
 d) $(x-3)(x+7) \geq 0$; e) $x^2 - x + 3 > 0$; f) $\frac{x-5}{3x+3} \leq 0$.

■ ■ Formăm capacitățile și aplicăm

4. Rezolvați în \mathbb{R} sistemul de inecuații: a) $\begin{cases} x - 4 > 5 - 2x, \\ 3 - 2x < 7 + x; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 10x - 2 > 4x + 1, \\ 2x - \frac{2}{3} > \frac{3x}{2} - \frac{1}{2}. \end{cases}$
5. Aflați cel mai mic număr întreg care aparține domeniului de definiție al funcției definite prin formula $f(x) = \sqrt{4 + x + \frac{3}{x}}$.
6. Rezolvați în \mathbb{R} inecuația: a) $(x-4)^2 + 12 \geq (3x-2)^2$; b) $3x(x + \sqrt{3}) \leq (x + \sqrt{3})^2$;
 c) $\frac{(x-2)(x^2+4)}{3x+1} \leq 0$; d) $\frac{7x}{3x-4} \geq 1$.
7. Pentru care valori ale lui x valoarea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 - 14x + 20$, este mai mare decât valorile corespunzătoare ale funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2x - 16$?
8. Determinați legitatea și aflați numărul omis:

$\frac{x^2 - 6x + 8}{x - 5} \geq 0$	$\frac{2}{7}$
$\frac{x + 3}{10x - x^2 - 16} \leq 0$?

■ ■ ■ Dezvoltăm capacitățile și creăm

9. Rezolvați în \mathbb{R} sistemul de inecuații: a) $\begin{cases} x - 2 > 5x - \frac{x-3}{2}, \\ |3x + 2| < 10; \end{cases}$ b) $\begin{cases} |x - 2| \geq 6, \\ |x - 5| \leq 3. \end{cases}$

10. Rezolvați în \mathbb{R} inecuația dublă $1 < \frac{7x-2}{2x+1} < 3$.
11. Rezolvați în \mathbb{R} inecuația $\frac{|x+1|}{x^2+4x-12} \geq 0$.
12. Aflați valorile parametrului real a pentru care inecuația $ax^2 - 8ax + 3a + 7 \geq 0$ nu are soluții în \mathbb{R} .
13. Determinați valorile parametrului real a , astfel încât orice $x \in \mathbb{R}$ să fie soluție a inecuației $(a^2 - 1)x^2 + 2(1 - a)x + 2 \geq 0$.

Test sumativ

Timp efectiv de lucru:
45 de minute



Varianta I

1. Fie expresiile $E_1 = \frac{2x-5}{3}$ și $E_2 = -\frac{4x+1}{5}$.
- a) Aflați valorile reale ale lui x , astfel încât $E_1 < E_2$. **4 p**
- b) Aflați valorile reale ale lui x pentru care suma expresiilor E_1 și E_2 este un număr nenegativ. **4 p**
- c) Rezolvați în \mathbb{R} sistemul $\begin{cases} E_1 > 0, \\ E_2 \leq 0. \end{cases}$ **5 p**
2. Șirul (a_n) este definit prin formula $a_n = 7n + 2$.
Arătați că șirul (a_n) este crescător. **4 p**
3. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 + x - 3$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + 5$.
- a) Indicați litera **A** dacă propoziția este adevărată, sau litera **F** dacă ea este falsă:
„Funcția g ia valori pozitive pentru $x \in (5, +\infty)$ ”.
A **F** **2 p**
- b) Aflați $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$. **7 p**
4. La o piscină, costul este de 20 lei pe oră, iar consumația minimă este de 40 lei. La o altă piscină, costul este de 15 lei pe oră, iar consumația minimă este de 60 lei. Determinați după câte ore a doua piscină este mai avantajoasă decât prima. **6 p**

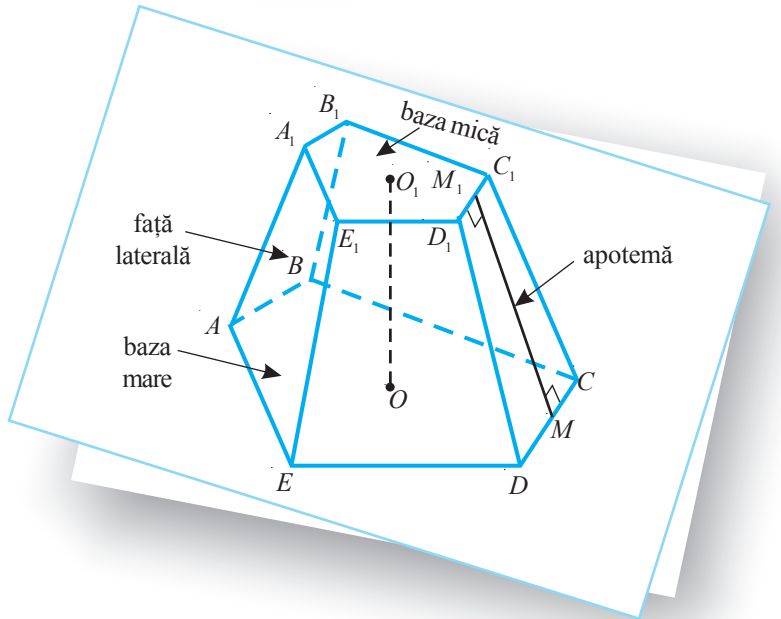
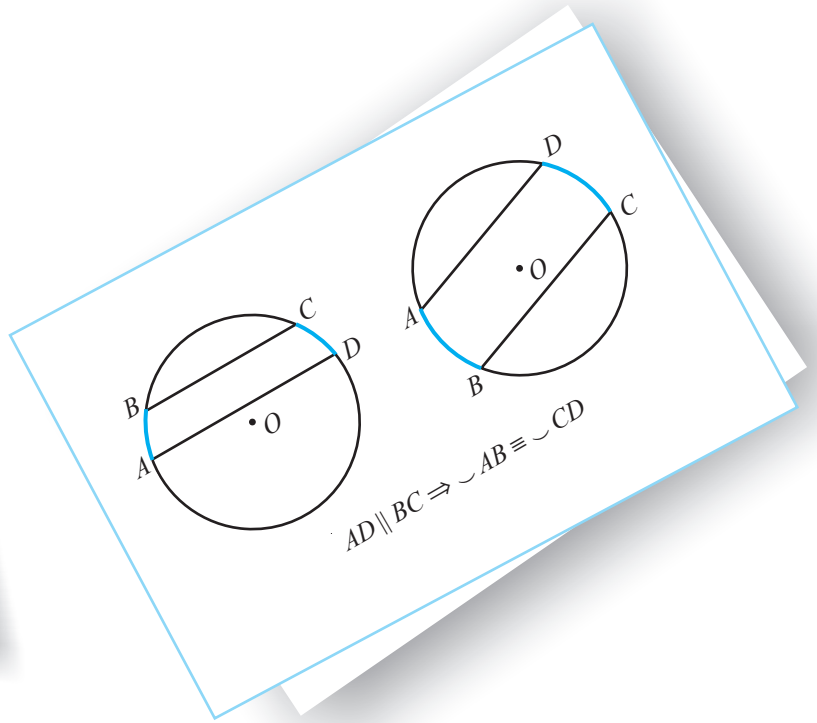
Varianta II

1. Fie expresiile $M_1 = \frac{1-3x}{2}$ și $M_2 = \frac{2x+3}{7}$.
- a) Aflați valorile reale ale lui x , astfel încât $M_1 < M_2$.
- b) Aflați valorile reale ale lui x pentru care diferența $M_1 - M_2$ este un număr nenegativ.
- c) Rezolvați în \mathbb{R} sistemul $\begin{cases} M_1 \leq 0, \\ M_2 > 0. \end{cases}$
2. Șirul (b_n) este definit prin formula $b_n = -3n + 1$.
Arătați că șirul (b_n) este descrescător.
3. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 6$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3x^2 - 8x - 3$.
- a) Indicați litera **A** dacă propoziția este adevărată, sau litera **F** dacă ea este falsă:
„Funcția f ia valori negative pentru $x \in (6, +\infty)$ ”.
A **F**
- b) Aflați $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$.
4. Compania „Moldnet” propune conectarea la internet la prețul de 240 lei pentru instalare și taxa lunară de 150 lei. Compania „Supernet”, oferind aceeași viteză a internetului, propune conectarea la prețul de 300 lei pentru instalare și taxa lunară de 140 lei. Determinați după câte luni oferta companiei „Moldnet” devine mai convenabilă.

Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	32-30	29-27	26-24	23-20	19-15	14-10	9-7	6-4	3-2	1-0

GEOMETRIE



Recapitulare și completări

§1. Puncte, linii, plane, unghiuri

1.1. Poziții relative în plan

✓ Două puncte

Puncte confundate	Puncte distincte
$A \cdot B$	$A \cdot \quad \cdot B$
Notăm: $A = B$.	Notăm: $A \neq B$.



Punctul este cea mai simplă figură geometrică. Toate celelalte figuri geometrice sînt compuse din puncte.

O figură geometrică este o mulțime de puncte.

Porțiunea dreptei AB cuprinsă între punctele A și B se numește **segment deschis** și se notează (AB) . Punctele A și B se numesc **extremitățile** (sau **capetele**) segmentului.

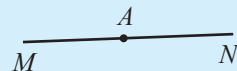
Segmentul închis AB se notează $[AB]$ și este format din (AB) și punctele A, B .

✓ Un punct și o dreaptă

Punctul aparține dreptei.	Punctul nu aparține dreptei.
	
Notăm: $A \in d$.	Notăm: $A \notin d$.

Trei sau mai multe puncte ale unei drepte se numesc **puncte coliniare**.




Dacă punctul A aparține dreptei d , atunci dreapta d este împărțită de acest punct în două **semidrepte complementare** (sau **opuse**).



În desen, punctul A este **originea** semidreptelor complementare (AM și AN).

Semidreapta ce nu conține originea ei se numește **deschisă**. Semidreapta $[AM$ este **închisă**, iar semidreapta $(AM$ – **deschisă**.

✓ Două drepte

Drepte confundate	Drepte concurente	Drepte paralele
		
Notăm: $a = b$.	Notăm: $a \cap b = \{M\}$.	Notăm: $a \parallel b$.

✓ Două drepte paralele intersectate de o secantă

Dreptele paralele a și b formează cu secanta c următoarele perechi de unghiuri (fig. 1):

a) congruente:

- alterne interne $\left\langle \begin{array}{l} \angle 3, \angle 6 \\ \angle 4, \angle 5 \end{array} \right.$
- alterne externe $\left\langle \begin{array}{l} \angle 1, \angle 8 \\ \angle 2, \angle 7 \end{array} \right.$
- corespondente $\left\langle \begin{array}{l} \angle 1, \angle 5 \\ \angle 2, \angle 6 \\ \angle 3, \angle 7 \\ \angle 4, \angle 8 \end{array} \right.$

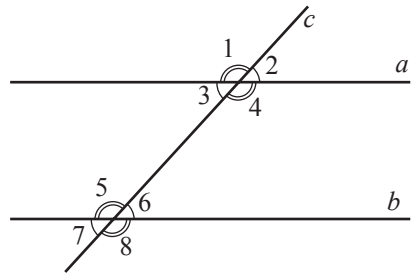


Fig. 1

b) suplementare (adică avînd suma măsurilor lor egală cu 180°):

- interne de aceeași parte a secantei $\left\langle \begin{array}{l} \angle 3, \angle 5 \\ \angle 4, \angle 6 \end{array} \right.$
- externe de aceeași parte a secantei $\left\langle \begin{array}{l} \angle 1, \angle 7 \\ \angle 2, \angle 8 \end{array} \right.$

⇒ Pentru a afirma că două drepte intersectate de o secantă sînt paralele, este suficient să ne convingem că unghiurile unei perechi dintre cele menționate posedă proprietatea respectivă (sînt congruente sau suplementare).

Exercițiu. Dreptele d_1 și d_2 din figura 2 sînt paralele. Aflați măsurile necunoscute ale unghiurilor (x, y, z, t, u, v, w).

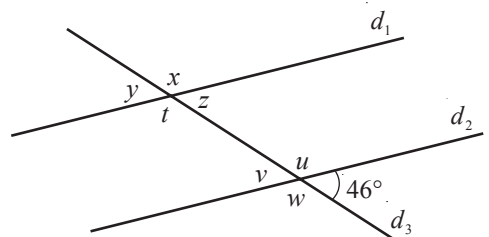


Fig. 2

1.2. Poziții relative în spațiu

✓ Două drepte

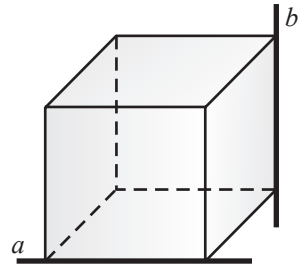
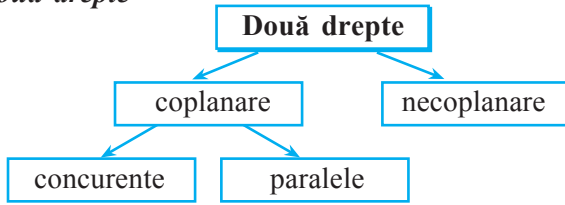


Fig. 3

⇒ Două drepte care nu pot fi situate în același plan sînt **necoplanare**.

În figura 3, dreptele a și b (care conțin două muchii ale diferitor fețe ale cubului) sînt necoplanare.

✓ Un punct și un plan

Punctul aparține planului.	Punctul nu aparține planului.
Notăm: $A \in \alpha$	Notăm: $A \notin \alpha$

✓ O dreaptă și un plan

Dreapta este paralelă cu planul.	Dreapta intersectează planul.	Dreapta aparține planului.
Notăm: $d \parallel \alpha$ sau $d \cap \alpha = \emptyset$.	Notăm: $d \cap \alpha = \{A\}$.	Notăm: $d \subset \alpha$.

Definiție

O **dreaptă** se numește **paralelă cu un plan** dacă ea nu are puncte comune cu planul.

✓ Două plane

Planele coincid (sînt confundate).	Planele se intersectează.	Planele sînt paralele.
Notăm: $\alpha = \beta$.	Notăm: $\alpha \cap \beta = l$.	Notăm: $\alpha \parallel \beta$.

Definiție

Două plane se numesc **plane paralele** dacă ele nu au niciun punct comun.

Observăm că intersecția a două plane este o dreaptă. Astfel, două plane nu pot avea doar un punct comun, doar două puncte comune, doar trei puncte comune etc.

Teoremă

Dacă un punct aparține planelor diferite α și β , atunci ele au o unică dreaptă comună.

• Ce formă va avea în fiecare caz linia de tăiere (fig. 4), dacă dintr-o lovitură aplicată de fiecare cuțit sub un unghi de 45° vom „perfora” planul α ? Justificați.

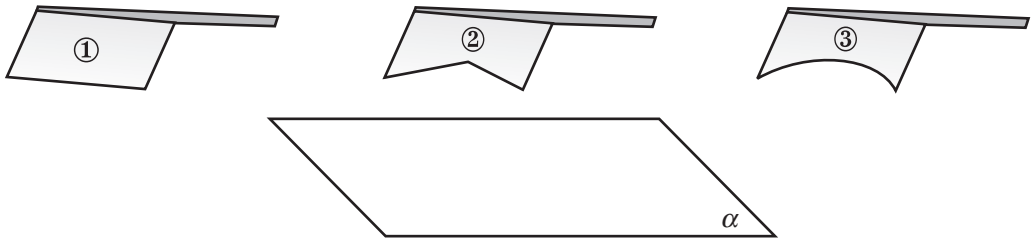


Fig. 4

1.3. Unghiuri

✓ **Un unghi**

Unghi ascuțit	Unghi drept	Unghi obtuz	Unghi alungit (întins)	Unghi nul
Notăm: $m(\angle AOB) < 90^\circ$.	Notăm: $m(\angle AOB) = 90^\circ$.	Notăm: $m(\angle AOB) > 90^\circ$.	Notăm: $m(\angle AOB) = 180^\circ$.	Notăm: $m(\angle AOB) = 0^\circ$.

Unghiurile alungite și cele nule se numesc **unghiuri improprii**, celelalte unghiuri se numesc **unghiuri proprii**.

Două unghiuri proprii se numesc **unghiuri adiacente** dacă au același vîrf, o latură comună, iar celelalte două laturi sînt situate de părți diferite ale laturii comune.

Unghiurile AOB și BOC din figura 5 sînt adiacente.

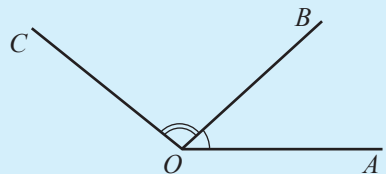
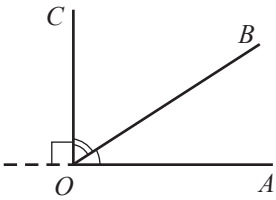
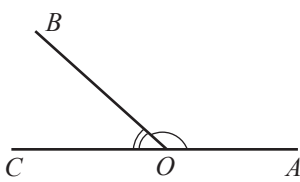
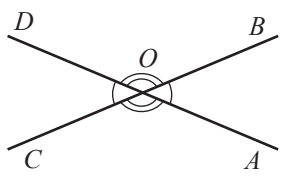
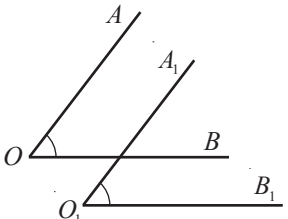
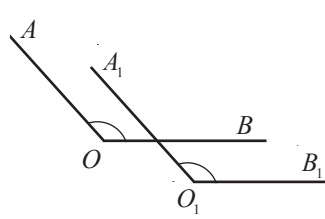
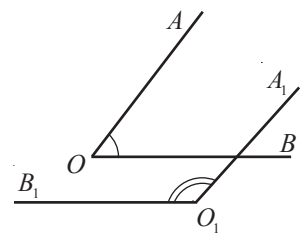


Fig. 5

✓ Două unghiuri cu același vîrf (cazuri speciale)

Unghiuri adiacente complementare	Unghiuri adiacente suplementare	Unghiuri opuse la vîrf
 <p>$m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = 90^\circ$</p>	 <p>$m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = 180^\circ$</p>	 <p>$\angle AOB \equiv \angle COD$ $\angle AOC \equiv \angle BOD$</p>

✓ Două unghiuri cu laturile respectiv paralele

 <p>$\angle AOB \equiv \angle A_1O_1B_1$</p>	 <p>$\angle AOB \equiv \angle A_1O_1B_1$</p>	 <p>$m(\angle AOB) + m(\angle A_1O_1B_1) = 180^\circ$</p>
---	--	--

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Citiți:

- a) $A \in b$, $M \notin c$, $\{N\} = b \cap c$; b) $d \subset \beta$, $[MN] \subset \alpha$, $a \cap b = \{K\}$;
 c) $MN > AB$, $A \notin \alpha$, $l \subset \alpha$; d) $d \parallel l$, $AB \perp m$, $\{A, B, C\} \subset \beta$.

2. Realizați cîte un desen pentru fiecare din cazurile a)–d) ale exercițiului 1.

3. Selectați propozițiile matematice și stabiliți valoarea lor de adevăr:

- a) „Mărul este legumă.” b) „Compasul este o figură geometrică.”
 c) „O lecție durează 45 min.” d) „Oricare ar fi dreapta, există puncte ce-i aparțin.”
 e) „Două segmente congruente au lungimi egale.”

4. Formulați negația fiecăreia dintre propozițiile exercițiului 3.

5. Unul dintre cele 4 unghiuri formate de două drepte concurente are măsura de 36° . Aflați măsurile celorlalte unghiuri.

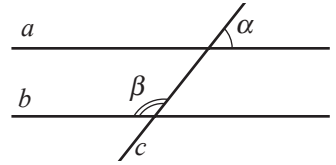
6. Aflați măsurile a două unghiuri:

- a) opuse la vîrf și complementare;
 b) suplementare, știind că măsura unui unghi este cu 30° mai mică decît a celuiilalt;
 c) complementare, știind că măsura unui unghi este de 9 ori mai mare decît a celuiilalt;
 d) congruente și adiacente, știind că măsura unghiului format de bisectoarele lor este de 70° .

7. Dreptele a și b din desen sînt paralele.

Aflați măsurile unghiurilor formate de secanta c cu dreptele a și b , dacă:

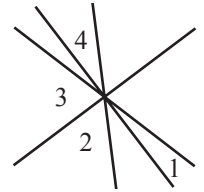
- a) $\alpha = 41^\circ$; b) $\beta = 108^\circ$; c) $\beta - \alpha = 32^\circ$.



8. Formați cu ajutorul expresiilor de pe fișii propoziții adevărate de forma: „Dacă..., atunci...”.

două unghiuri sînt opuse la vîrf
 două drepte coplanare nu sînt concurente
 două drepte formează cu o secantă o pereche de unghiuri alterne interne congruente
 ele sînt paralele
 ele sînt congruente
 două drepte sînt perpendiculare pe a treia (coplanară cu ele)
 două unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă sînt corespondente
 două unghiuri au măsuri egale
 distanța dintre două drepte diferite este 0
 ele sînt concurente
 ele sînt suplementare
 două unghiuri sînt drepte

9. Examinați desenul. Se știe că $\angle 1 = 15^\circ$, $\angle 3 = 75^\circ$, iar unghiul 2 are măsura de 2 ori mai mare decît a unghiului 4. Aflați măsura unghiului 4.



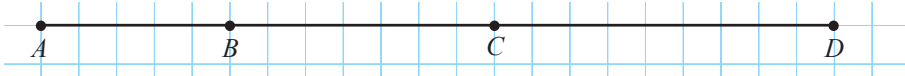
Formăm capacitățile și aplicăm

10. Punctele A, B, C sînt situate, în această ordine, pe o dreaptă și $AB : BC = 5 : 3$. Aflați:

- a) $\frac{AB}{AC}$; b) $\frac{AC}{BC}$.

11. Examinați desenul și calculați raportul lungimilor segmentelor:

- a) AB și CD ; b) AC și AD ; c) BC și BD ; d) AD și AB .



12. Punctul C aparține segmentului AB , astfel încît $\frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$. Calculați raportul:

- a) $\frac{AB}{AC}$; b) $\frac{BC}{AB}$; c) $\frac{AB}{AB - BC}$; d) $\frac{AB - AC}{AB + BC}$.

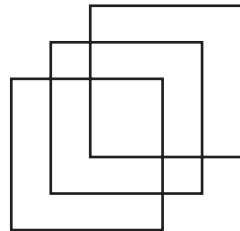
13. Calculați:

- a) MN , dacă raportul lungimilor segmentelor MN și KP este egal cu 2,4 și $KP = 4$ cm;
 b) KP , dacă raportul lungimilor segmentelor MN și KP este egal cu 4,2 și $MN = 21$ cm;
 c) raportul lungimilor segmentelor MN și KP , dacă $[MN]$ este de 3 ori mai scurt decît $[KP]$.

14. Împărțiți un segment de 12 cm în 3 segmente ale căror lungimi sînt proporționale cu numerele 1, 2, 3.

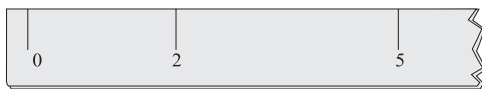
15. Împărțiți un segment de 13,5 cm în 3 segmente ale căror lungimi sînt proporționale cu numerele 2, 4, 3.

16. Formulați reciprocele propozițiilor obținute la rezolvarea exercițiului 14. Stabiliți valoarea lor adevăr.
17. Pe o dreaptă au fost marcate la distanțe egale unul de altul 10 puncte, astfel încât primul și ultimul determină un segment de lungime x . Pe altă dreaptă au fost marcate similar (la aceeași distanță) 100 de puncte, astfel încât primul și ultimul formează un segment de lungime y . De câte ori x este mai mic decât y ?
18. Se poate construi figura din desen fără a ridica creionul și fără a redesena vreun segment?
19. Demonstrați prin contraexemple că următoarele propoziții sînt false:
 - a) „Orice număr de forma \sqrt{a} , unde $a \in \mathbb{N}$, este irațional.”
 - b) „Cîtul oricăror două numere iraționale este un număr irațional.”
 - c) „Dacă o secantă formează cu dreptele a și b patru unghiuri de 70° și alte 4 unghiuri de 110° , atunci dreptele a și b sînt paralele.”
 - d) „Orice număr rațional poate fi scris sub formă de fracție în mod univoc.”



Dezvoltăm capacitățile și creăm

20. Pe rigla din desen sînt indicate doar notațiile 0 cm, 2 cm și 5 cm. Cum se poate construi cu ajutorul ei un segment cu lungimea de 6 cm?
21. Cum se poate tăia, fără instrumente de măsurat, dintr-un cablu cu lungimea de $\frac{2}{3}$ m o bucată de 50 cm?
22. Împărțiți un pătrat în două:
 - a) patrulete congruente, fiecare cu orice 2 laturi necongruente;
 - b) pentagoane congruente;
 - c) hexagoane congruente.



§2. Poligoane

2.1. Elementele triunghiului. Clasificarea triunghiurilor

• Observați figurile 6–8 și completați casetele, astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

- a) Laturile triunghiului XYZ sînt _____.
- b) $[YB]$ este bisectoarea triunghiului XYZ , deoarece _____.
- c) $[YH]$ este înălțimea triunghiului XYZ , deoarece _____.
- d) Segmentul _____ este _____ triunghiului XYZ , deoarece $XM = MZ$.

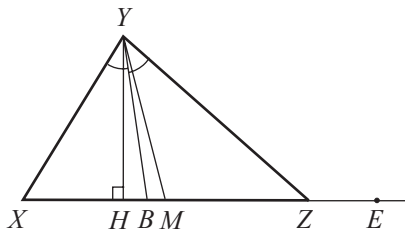


Fig. 6

- e) Triunghiul XYZ este , deoarece $XY \neq YZ$, $XZ \neq YZ$, $XY \neq XZ$.
 Triunghiul XYZ este , deoarece toate unghiurile lui sînt ascuțite.
- f) Unghiul YZE este un unghi al triunghiului XYZ și
 $m(\angle YZE) = m(\angle X) +$.
- g) Triunghiul ISO este , deoarece $IS = SO$.
 Prin urmare, unghiurile sînt congruente.
 Triunghiul ISO este , deoarece
 $m(\angle S) > 90^\circ$.
- h) Triunghiul ISO are mediana , bisectoarea
 și înălțimea ST .
- i) Triunghiul dreptunghic DRE are catetele
 și $DR^2 =$ - .
- j) $[AC]$ este linie mijlocie a triunghiului DRE , deoarece
 = AD și $RC =$.
- Prin urmare, $2AC =$ și $AC \parallel$.

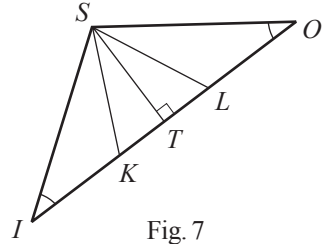


Fig. 7

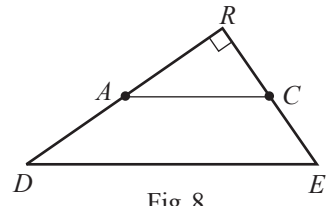


Fig. 8

2.2. Congruența și asemănarea triunghiurilor

Definiție

Două **triunghiuri** se numesc **congruente** dacă au laturile respectiv congruente și unghiurile respectiv congruente.

Notația $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ se citește „Triunghiurile ABC și DEF sînt congruente”.

Exercițiu. Triunghiurile TRI și UNG sînt congruente. Completați: $[IT] \equiv$,
 $[UN] \equiv$, $\equiv [NG]$, $\equiv \angle R$, $\angle T \equiv$, \equiv .

Criteriile de congruență a triunghiurilor

LUL	Dacă două laturi și unghiul dintre ele ale unui triunghi sînt respectiv congruente cu două laturi și unghiul dintre ele ale altui triunghi, atunci aceste triunghiuri sînt congruente.
ULU	Dacă o latură și unghiurile alăturate ei ale unui triunghi sînt respectiv congruente cu o latură și unghiurile alăturate ei ale altui triunghi, atunci aceste triunghiuri sînt congruente.
LLL	Dacă laturile unui triunghi sînt respectiv congruente cu laturile altui triunghi, atunci aceste triunghiuri sînt congruente.

Problemă. Examinați figura 9.

Aplicând criteriile de congruență, găsiți perechi de triunghiuri congruente, dacă:

- $AB = DC, AD = BC,$
- $AC = FE, AF = CE,$
- $\angle HAC \equiv \angle GEF,$
- $\angle BCF \equiv \angle GFC,$
- $\angle ACB \equiv \angle EFG.$

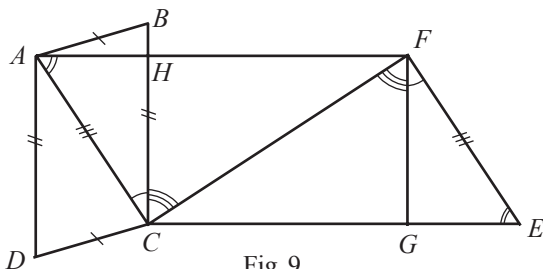


Fig. 9

Definiție

Două **triunghiuri** se numesc **asemenea** dacă ele au unghiurile corespunzătoare congruente, iar laturile corespunzătoare sînt proporționale.

Notația $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ se citește „Triunghiurile ABC și DEF sînt asemenea”.

Exercițiu. Triunghiurile TRI și UNG sînt asemenea. Completați:

$$\frac{TR}{\square} = \frac{TI}{UG} = \frac{\square}{\square}, \quad \angle T \equiv \square, \quad \square \equiv \angle R, \quad \square \equiv \square.$$

Criteriile de asemănare a triunghiurilor

UU	Dacă două unghiuri ale unui triunghi sînt congruente cu două unghiuri ale altui triunghi, atunci aceste triunghiuri sînt asemenea.
LUL	Dacă două laturi ale unui triunghi sînt proporționale cu două laturi ale altui triunghi și unghiurile formate de aceste laturi sînt congruente, atunci aceste triunghiuri sînt asemenea.
LLL	Dacă laturile unui triunghi sînt proporționale cu laturile altui triunghi, atunci aceste triunghiuri sînt asemenea.

Exercițiu. Formulați criteriile de asemănare pentru două triunghiuri dreptunghice.

Problemă. Examinați figura 10.

Aplicînd criteriile de asemănare, găsiți perechi de triunghiuri asemenea, dacă:

- $BF \parallel CE, \frac{BC}{FG} = \frac{BD}{HF}, \frac{AB}{DF} = \frac{AF}{DE},$
- $\angle A \equiv \angle EDF, \angle BCD \equiv \angle HGF.$

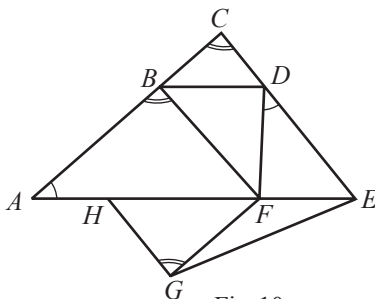


Fig. 10

Teorema lui Thales

Dacă o dreaptă care nu conține niciunul din vîrfurile unui triunghi este paralelă cu o latură a triunghiului, atunci segmentele determinate de această dreaptă pe dreptele suport ale celorlalte două laturi sînt proporționale (fig. 11):

$$\begin{cases} \triangle ABC \\ d \parallel AC \\ d \cap AB = \{A_1\} \\ d \cap BC = \{C_1\} \end{cases} \Rightarrow \frac{A_1A}{A_1B} = \frac{C_1C}{C_1B}$$

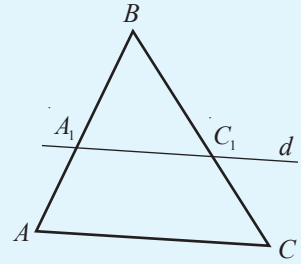


Fig. 11

Exercițiu. Formulați teorema lui Thales pentru triunghiul TRI din figura 12, dacă $l \parallel TI$.

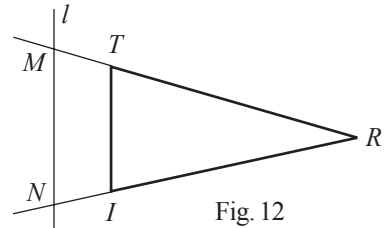


Fig. 12

Problemă. Reciproca teoremei lui Thales de asemenea este teoremă. Formulați reciproca teoremei lui Thales.

2.3. Relații între elementele triunghiului

Teoreme despre elementele triunghiului dreptunghic

Teorema înălțimii

Pătratul înălțimii coborîte din vîrfurile unghiului drept al unui triunghi dreptunghic este egal cu produsul dintre lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză (fig. 13):

$$AD^2 = BD \cdot DC.$$

Teorema catetei

Pătratul lungimii oricărei catete a unui triunghi dreptunghic este egal cu produsul dintre lungimile ipotenuzei și proiecției acestei catete pe ipotenuză (fig. 13):

$$AB^2 = BC \cdot BD, \quad AC^2 = BC \cdot CD.$$

Teorema lui Pitagora

Pătratul lungimii ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor (fig. 13):

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

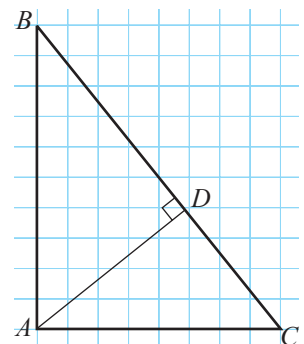


Fig. 13

Probleme. Aplicînd teoreme despre triunghiul dreptunghic, calculați distanțele necunoscute (fig. 14).

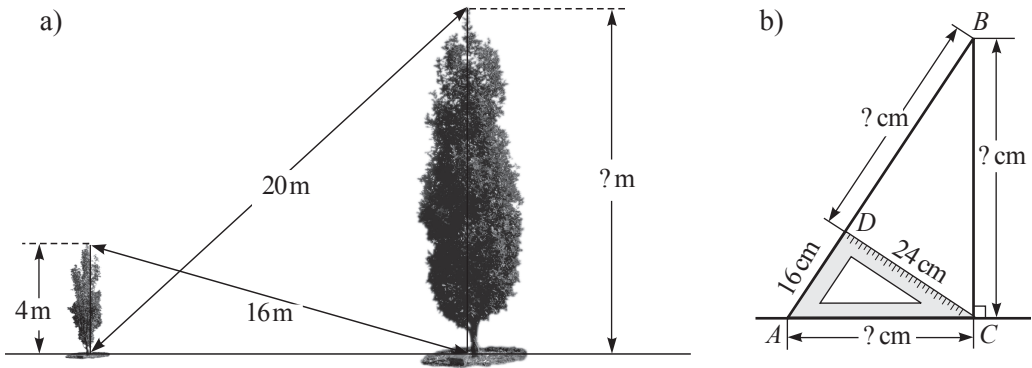


Fig. 14

Teorema bisectoarei (opțional)

Orice bisectoare a triunghiului împarte latura opusă vârfului din care este construită în segmente proporționale cu celelalte laturi ale triunghiului (fig. 15):

$$\frac{BM}{AB} = \frac{MC}{AC}$$

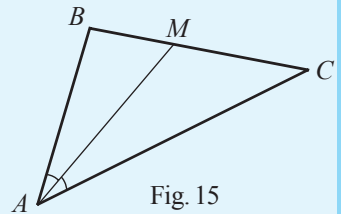
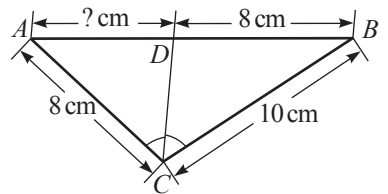


Fig. 15

Problemă. Aplicînd teorema bisectoarei, calculați AD .



2.4. Patrulater

1 Observați figura 16 și completați casetele, astfel încît să obțineți propoziții adevărate.

- a) Laturile patrulaterului $PATR$ sînt .
- b) Unghiurile patrulaterului $PATR$ sînt .
- c) Suma măsurilor unghiurilor patrulaterului $PATR$ este egală cu .
- d) Dacă perimetrul patrulaterului $PATR$ este de 49 cm, $PA + TR = 21$ cm și latura PR este cu 2 cm mai lungă decît latura AT , atunci $AT =$ cm.
- e) Dacă $PA \parallel TR$, iar $AT \parallel PR$, atunci $PATR$ este .

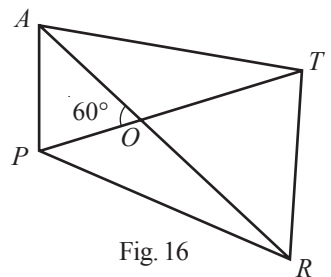
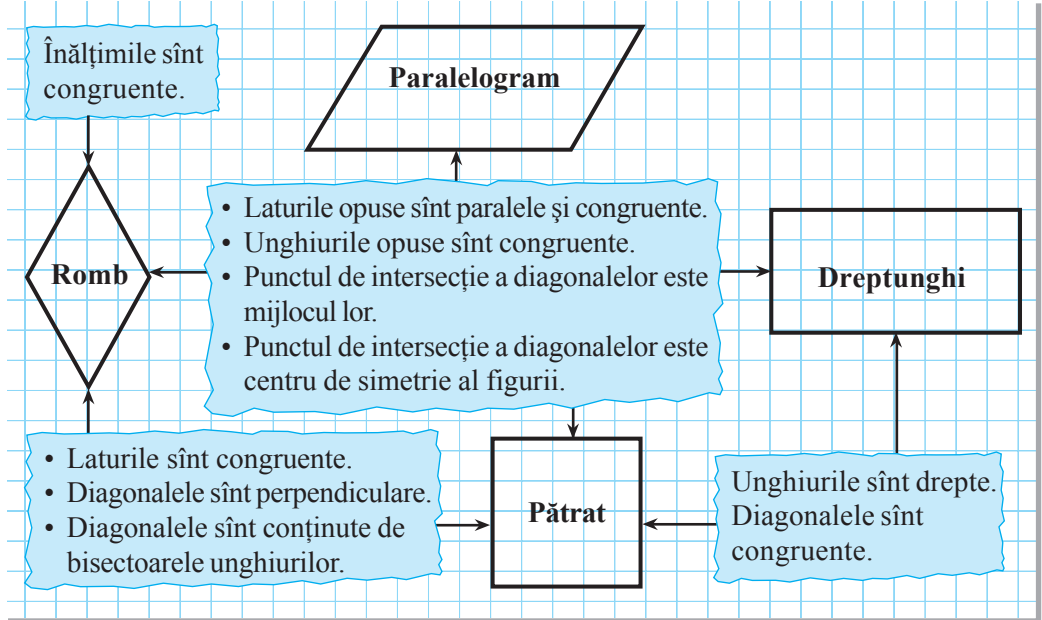


Fig. 16

2. Observați diagrama și completați casetele, astfel încât să obțineți propoziții adevărate.



- Rombul este un paralelogram _____.
- Pătratul este un romb _____.
- Pătratul este un dreptunghi _____.
- _____ este un paralelogram cu unghiuri drepte.
- _____ este un patrulater cu unghiuri drepte.



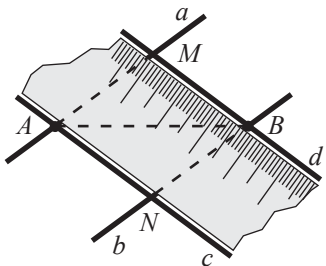
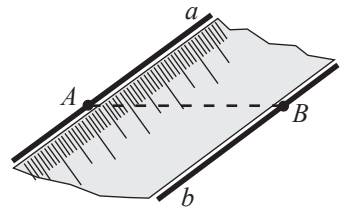
Problema de construcție

Să construim doar cu ajutorul riglei (negradate) mediatoarea unui segment dat AB .

Rezolvare:

- Fie segmentul AB .

Fixăm rigla astfel, încât marginile ei să atingă capetele segmentului AB și construim dreptele paralele a și b .



- Fixăm rigla în altă poziție, astfel încât iarăși să atingem capetele segmentului AB și construim dreptele paralele c și d .

Notăm $\{M\} = a \cap d$ și $\{N\} = b \cap c$.

- ③ Patrulaterul $AMBN$ este un romb (înălțimile lui sînt congruente, fiind egale cu lățimea riglei). Prin urmare, $[MN] \perp [AB]$ și punctul lor de intersecție este mijlocul lor. Deci, MN este mediatoarea segmentului AB (fig. 17).

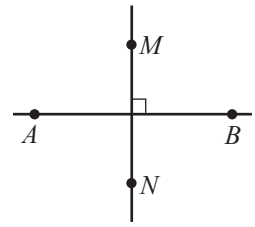


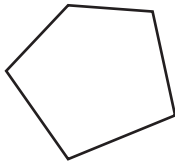
Fig. 17

Observație. Algoritmul este valabil pentru orice segment AB cu lungimea mai mare decît lățimea riglei și mai mică decît lungimea ei. De ce?

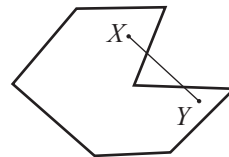
Exercițiu. Luînd în considerație faptul că diagonalele rombului sînt conținute de bisectoarele lui, construîți doar cu ajutorul riglei negradate bisectoarea unui unghi ascuțit dat.

2.5. Poligoane cu n ($n > 4$) laturi. Poligoane regulate

Dacă orice două puncte din interiorul unui poligon determină un segment care aparține interiorului poligonului, atunci poligonul este **convex**, altfel – poligonul este **concav** (fig. 18).



Poligon convex
a)



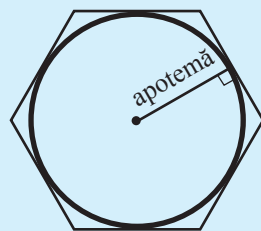
Poligon concav
b)

Fig. 18

- Copiați și completați tabelul:

Denumirea poligonului	Numărul de laturi	Numărul diagonalelor ce pornesc dintr-un vîrf al poligonului	Numărul total de diagonale	Suma măsurilor unghiurilor poligonului
Pentagon	5			
	6			720°
Heptagon			14	
Octagon				
Nonagon				
Decagon	10			
Poligon convex cu n laturi	n	$n - 3$		

- Un poligon convex cu laturile congruente și unghiurile congruente se numește **poligon regulat**.
- Oricărui poligon regulat i se poate circumscrie un cerc.
- În orice poligon regulat poate fi înscris un cerc. Raza acestui cerc se numește **apotema** poligonului regulat.



Astfel, triunghiul echilateral și pătratul sînt poligoane regulate.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

- Stabiliți dacă următoarele trei numere pot reprezenta lungimile laturilor unui triunghi (exprimate în aceeași unitate de măsură):
 - 9, 10, 16;
 - 8, 12, 20;
 - $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{11}$;
 - $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{14}$.
- Realizați un desen corespunzător situației:
 - punctul M este mijlocul bazei triunghiului obtuzunghic isoscel ABC ;
 - triunghiurile ABC și CMB sînt isoscele și $AM \cap BC = \{D\}$;
 - triunghiurile ABF și GDE sînt echilaterale și $G \in [AF]$, $F \in [GE]$;
 - $\triangle BAE \equiv \triangle DEA$, $[BE] \cap AD = \{C\}$.
- Segmentele AA_1 , BB_1 și CC_1 sînt mediane ale triunghiului ABC . Aflați perimetrul triunghiului ABC , dacă:
 - $BC_1 = 9$ cm, $BA_1 = 10$ cm, $AB_1 = 12$ cm;
 - $BA_1 = 3\sqrt{5}$ cm, $AC_1 = \sqrt{125}$ cm, $CB_1 = 2\sqrt{20}$ cm.
- Fie triunghiul ABC . Măsura unghiului A este de 2 ori mai mare decît măsura unghiului B și de 3 ori mai mică decît măsura unghiului C . Aflați măsurile unghiurilor triunghiului.
- Construiți un triunghi cu laturile de 6 cm, 7 cm, 8 cm.
- Construiți un triunghi cu două laturi de 8 cm și 9 cm și unghiul format de ele de 45° .
- Construiți un triunghi cu o latură de 10 cm și unghiurile alăturate ei de 30° și 80° .
- Calculați perimetrul unui triunghi:
 - isoscel cu o latură de 7 cm și alta de 15 cm;
 - echilateral cu linia mijlocie de 12 cm;
 - scalen ale cărui laturi au lungimile numere naturale consecutive pare, cea mai lungă fiind de 28 cm.
- Calculați:
 - $31^\circ 40' 29'' + 46^\circ 24' 37''$;
 - $118^\circ 27' 35'' + 36^\circ 27' 18''$;
 - $90^\circ - 17^\circ 55' 56''$;
 - $142^\circ - 72^\circ 34' 56''$.
- Punctele M , N , K , P sînt mijloacele laturilor patrulaterului $ABCD$. Aflați lungimile laturilor patrulaterului $MNKP$, dacă $AC = 20$ cm, $BD = 24$ cm.
- Punctul M_1 este proiecția ortogonală a punctului $M(a, b)$ pe axa absciselor a unui sistem de axe ortogonale. Aflați coordonatele punctului M_1 , dacă:
 - $a = 3$, $b = -\sqrt{8}$;
 - $a = -0,4$, $b = 2\sqrt{5}$.

12. Punctul M aparține bisectoarei unghiului AOB . Aflați distanța de la punctul M la semidreapta $[OA]$, dacă distanța de la punctul M la semidreapta $[OB]$ este de:
 a) $|\sqrt{7} - 3|$ cm; b) $|3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}|$ cm.
13. Fie trapezul $ABCD$ cu baza mare AD . Punctele X și Y sînt mijloacele laturilor laterale ale trapezului. Aflați:
 a) XY , dacă $AD = 18$ cm, $BC = 12$ cm; b) BC , dacă $AD = 20$ cm, $XY = 14$ cm.
14. Calculați măsurile unghiurilor exterioare ale unui triunghi:
 a) dreptunghic cu un unghi de 40° ; b) isoscel cu un unghi de 110° ;
 c) cu un unghi de 30° și altul de 80° .
15. Medianele AM și BN ale triunghiului ABC se intersectează în punctul P . Determinați:
 a) PM și PN , dacă $AP = 24$ cm, $BP = 30$ cm;
 b) AP și BP , dacă $PM = \sqrt{6}$ cm, $PN = \sqrt{7}$ cm.
16. Un unghi al paralelogramului are măsura de 55° . Aflați măsurile celorlalte unghiuri ale paralelogramului.
17. Un unghi al rombului are măsura cu 40° mai mare decît a altui unghi al acestui romb. Determinați măsurile unghiurilor rombului.
18. Aflați măsurile unghiurilor trapezului isoscel $ABCD$ cu baza mare AD , dacă:
 a) $m(\angle A) + m(\angle D) = 150^\circ$; b) $m(\angle B) + m(\angle C) = 210^\circ$.
19. Aflați măsurile unghiurilor trapezului dreptunghic $ABCD$ cu baza mare AD , dacă:
 a) $BA \perp AD$, $m(\angle A) + m(\angle D) = 150^\circ$; b) $CD \perp AD$, $m(\angle B) + m(\angle C) = 200^\circ$.
20. Între care șiruri de numere există o proporționalitate directă?
 a) 1, 2, 3, 4 și 5, 6, 7, 8; b) 2, 3, 4, 5 și 4, 6, 8, 10;
 c) $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ și 5, 6, 7; d) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ și 2,5; 2; 1.
21. Completați, astfel încît numerele din prima linie să fie direct proporționale cu numerele din linia a doua:
 a)

4	6	10	12	
	18			27

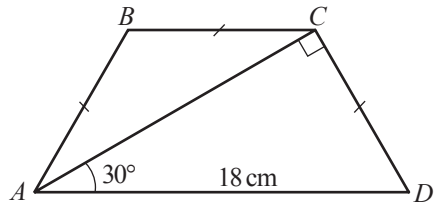
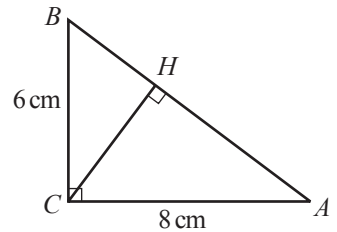
 b)

0,2		1,8		3,2	
	5	9	10		12
22. Aflați numărul total de diagonale ale unui poligon regulat:
 a) cu 13 laturi; b) cu 15 laturi.

Formăm capacitățile și aplicăm

23. Calculați perimetrul unui triunghi echilateral cu linia mijlocie de $\frac{9}{\sqrt{3}}$ cm.
24. Aflați măsura unghiurilor formate la intersecția:
 a) a două mediane ale triunghiului echilateral;
 b) a trei înălțimi ale triunghiului echilateral.
25. Înălțimea unui triunghi echilateral cu laturile tangente la un cerc este cu 10 cm mai mare decît raza acestui cerc. Determinați înălțimea triunghiului.
26. Mediana unui triunghi echilateral cu laturile tangente la un cerc este cu 12 cm mai mare decît raza acestui cerc. Aflați mediana triunghiului.

27. Pe prelungirea laturii AC a triunghiului echilateral ABC se ia punctul D , astfel încît $AC = CD$. Știind că $AB = 4\sqrt{3}$ cm, aflați:
 a) unghiurile triunghiului BCD ; b) BD .
28. Aflați lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic cu vîrfurile pe un cerc, dacă raza acestui cerc este cu 17 cm mai mică decît lungimea ipotenuzei.
29. Dacă mărîm cu 8 cm lățimea unui dreptunghi obținem un pătrat cu perimetrul de 96 cm. Aflați perimetrul dreptunghiului.
30. Aflați coordonatele celui de-al patrulea vîrf al paralelogramului $ABCD$, dacă:
 a) $A(-2; 3)$, $B(6; 4)$, $C(5; -3)$; b) $A(1; 1)$, $B(-3; 3)$, $C(-2; -1)$.
31. $[CM]$ și $[CH]$ sînt respectiv o mediană și o înălțime a triunghiului ABC cu $m(\angle C) = 90^\circ$.
 Aflați $\frac{BH}{AH}$ dacă $\frac{CM}{CH} = \frac{5}{4}$.
32. Examinați desenul. Aflați AB , AH , BH , CH .
33. Vîrfurile unui triunghi cu laturile de 6 cm, 8 cm și 10 cm aparțin unui cerc. Aflați raza cercului.
34. Examinați desenul. Aflați AB și AC .
35. Diagonala unui trapez isoscel înjumătățește unghiul obtuz al trapezului. Aflați lungimea bazei mari și înălțimea trapezului dacă baza mică este de 3 cm, iar perimetrul trapezului este egal cu 42 cm.
36. Fie trapezul isoscel $ABCD$ cu baza mare AD . Aflați măsurile unghiurilor trapezului, dacă $[AC]$ este bisectoarea unghiului BAD și $AD = 2BC$.



Dezvoltăm capacitățile și creăm

37. Fie O punctul de intersecție al diagonalelor paralelogramului $ABCD$. Aflați AB și BC , dacă perimetrul paralelogramului este egal cu 80 m, iar perimetrul triunghiului AOD este cu 10 m mai mare decît perimetrul triunghiului DOC .
38. Diagonala unui trapez isoscel împarte unghiul obtuz în jumătate. Aflați perimetrul trapezului dacă el este cu 18 cm mai mare decît lungimea bazei mari, iar linia mijlocie a trapezului este de 5 cm.
39. Laturile unui triunghi sînt tangente la un cerc. Aflați raza cercului dacă laturile triunghiului au lungimile egale cu 5 cm, 12 cm, 13 cm.
40. Fie ABC un triunghi isoscel cu $[AB] \equiv [BC]$. Punctele M și N aparțin exteriorului triunghiului ABC , astfel încît triunghiurile ABM și BCN sînt echilaterale. Demonstrați că $MN \parallel AC$.
41. Suma distanțelor de la vîrfurile triunghiului ABC la dreapta d este egală cu 30 cm. Aflați suma distanțelor de la mijloacele laturilor triunghiului ABC la dreapta d .
42. Punctul O aparține interiorului pătratului $ABCD$.
 Demonstrați că dacă $m(\angle OCD) = m(\angle ODC) = 15^\circ$, atunci triunghiul AOB este echilateral.

Test sumativ

Timp efectiv de lucru:
45 de minute



Varianta I

1. a) Realizați un desen corespunzător situației: $\triangle ACD$, $m(\angle A) = 90^\circ$, $B \in [AC]$, $E \in [DC]$, $AB = BC = 3$ cm, $CE = ED = 5$ cm. 2 p
 b) Aflați BE . 2 p
 c) Completați: $\triangle ACD \sim \square$. 2 p
 d) Aflați AD . 2 p

2. Un turist s-a pornit din punctul A și a mers spre est 480 m pînă în punctul B , apoi spre sud 200 m și a ajuns în punctul C . 2 p
 a) La ce distanță de la punctul A se află turistul? 2 p
 b) Determinați aria triunghiului ABC . 2 p
 c) Aflați distanța dintre punctul B și dreapta AC . 3 p
 d) Cît timp va parcurge el distanța CA dacă se va mișca cu viteza de 5,4 km/h? 3 p

3. Aflați numărul total de diagonale ale unui poligon regulat cu 12 laturi. 3 p

4. Fie trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $m(\angle A) = 45^\circ$. Baza mare a trapezului este de 8 cm, iar latura laterală cea mai lungă este de $4\sqrt{2}$ cm. Aflați perimetrul trapezului. 5 p

Varianta II

1. a) Realizați un desen corespunzător situației: $\triangle MNK$, $m(\angle M) = 90^\circ$, $P \in [MN]$, $R \in [NK]$, $MN = 2PN = 8$ cm, $NK = 2NR = 10$ cm. 2 p
 b) Aflați PR . 2 p
 c) Completați: $\triangle PNR \sim \square$. 2 p
 d) Aflați MK . 2 p

2. Un turist s-a pornit din punctul M și a mers spre nord 600 m pînă în punctul N , apoi spre vest 450 m și a ajuns în punctul K . 2 p
 a) La ce distanță de la punctul M se află turistul? 2 p
 b) Determinați aria triunghiului MNK . 2 p
 c) Aflați distanța dintre punctul N și dreapta MK . 3 p
 d) Cît timp va parcurge el distanța KM dacă se va mișca cu viteza de 5,4 km/h? 3 p

3. Aflați numărul total de diagonale ale unui poligon regulat cu 14 laturi. 3 p

4. Fie trapezul isoscel $ABCD$ cu baza mică BC de $2\sqrt{3}$ cm, înălțimea BK de 1 cm, $m(\angle A) = 30^\circ$. Aflați perimetrul trapezului. 5 p

Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	26–25	24–22	21–19	18–16	15–14	13–10	9–7	6–4	3–2	1–0

§1. Recapitulare și completări

1.1. Elementele cercului. Proprietăți de bază

NE AMINTIM

1 Stabiliți ce figură definește mulțimea:

- a) punctelor egal depărtate de extremitățile unui segment dat;
- b) punctelor situate la distanța de 5 cm de un punct dat.

Definiții

♦ Fie r un număr real pozitiv și O un punct din plan. **Cercul de centru O și rază r** este mulțimea punctelor din plan situate la distanța r de punctul O (fig. 1).

Notăm: $\mathcal{C}(O, r)$.

♦ Fie $A \in \mathcal{C}(O, r)$. De asemenea, numim **rază** segmentul ce unește centrul cercului cu un punct al lui.

♦ Segmentul ale cărui extremități sînt puncte ale cercului se numește **coardă**. Coarda care conține centrul cercului se numește **diametru** al cercului.

♦ Punctele A și B se numesc **diametral opuse**, dacă $[AB]$ este diametru.

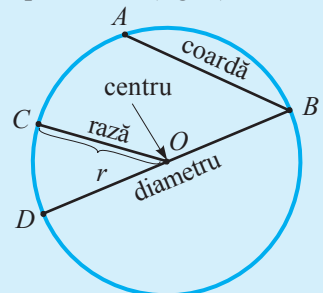


Fig. 1

• Amintiți-vă definiția figurilor congruente și stabiliți care dintre următoarele cercuri sînt congruente: $\mathcal{C}_1(A, r = 3 \text{ cm})$, $\mathcal{C}_2(B, r = 4 \text{ cm})$, $\mathcal{C}_3(A, r = 4 \text{ cm})$, $\mathcal{C}_4(B, r = 3 \text{ cm})$.

2 Examinați desenul (fig. 2, O este centrul cercului) și numiți punctele situate de centrul cercului la distanța:

- a) egală cu raza cercului;
- b) mai mică decît raza cercului;
- c) mai mare decît raza cercului.

Care dintre aceste puncte aparțin interiorului cercului?

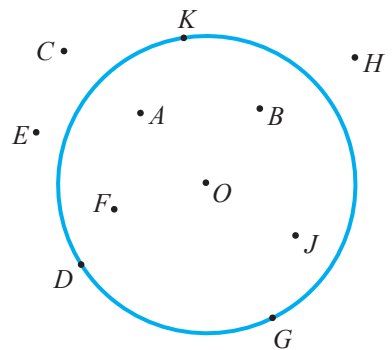


Fig. 2

Definiții

- ♦ Fie $\mathcal{C}(O, r)$. Mulțimea punctelor M din plan pentru care $OM < r$ se numește **interiorul cercului**. *Notăm:* $\text{Int } \mathcal{C}(O, r)$.
- ♦ Mulțimea punctelor N din plan pentru care $ON > r$ se numește **exteriorul cercului**. *Notăm:* $\text{Ext } \mathcal{C}(O, r)$.
- ♦ Reuniunea $\mathcal{C}(O, r)$ și a interiorului lui este **discul de centru O și rază r** . *Notăm:* $\mathcal{D}(O, r)$.
Prin urmare, $\mathcal{D}(O, r) = \mathcal{C}(O, r) \cup \text{Int } \mathcal{C}(O, r) = \{M \mid OM \leq r\}$.

3 *Examinați desenul (fig. 3) și demonstrați că **orice 3 puncte diferite ale unui cerc sînt necoliniare**.

Indicație. Demonstrați prin metoda reducerii la absurd că $C \notin AB$, unde A, B, C sînt trei puncte arbitrare diferite de pe cerc. Presupunînd că $C \in AB$, cercetați triunghiurile dreptunghice ODB și ODC .

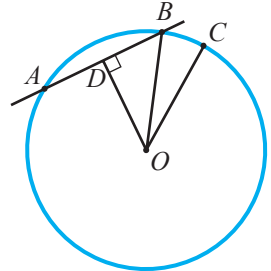


Fig. 3

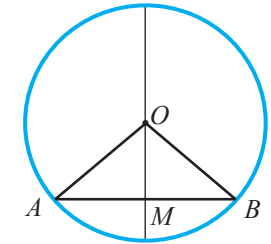


Fig. 4



INVESTIGĂM

4 Examinați desenul (fig. 4, O este centrul cercului).

Ce se poate spune despre segmentul OM și triunghiul AOB ,

- dacă: a) $OM \perp AB$;
b) M este mijlocul segmentului AB ?

Trageți concluzia.

Teorema 1

Dacă diametrul cercului conține mijlocul unei coarde, atunci el este perpendicular pe ea.

- Formulați reciproca teoremei 1, care de asemenea este teoremă.
- Demonstrați teorema 1 și reciproca ei.

Teorema 2

Dacă două coarde ale unui cerc sînt congruente, atunci ele sînt egal depărtate de centrul cercului.

*Să demonstrăm teorema 2.

Ipoteză: $\{A, B, C, D\} \subset \mathcal{C}(O, r)$, $[AB] \equiv [CD]$.

Concluzie: $d(O, [AB]) = d(O, [CD])$.

Demonstrație:

- ① $\triangle AOB \equiv \triangle COD$ (Criteriul LLL). Fie M, N mijloacele segmentelor AB și respectiv CD (fig. 5).

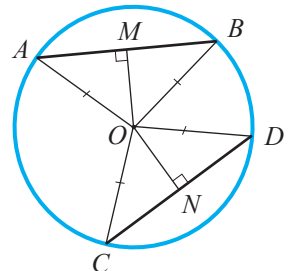


Fig. 5

* Opțional

② $[OM]$ și $[ON]$ sînt mediane și înălțimi ale triunghiurilor AOB și respectiv COD .

Conform ①, $[OM] \equiv [ON]$.

③ $d(O, [AB]) = OM = ON = d(O, [CD])$, c.c.t.d. ►

• Reciproca teoremei 2 de asemenea este teoremă.

Formulați și demonstrați reciproca teoremei 2.

• Reformulați într-o singură teoremă de forma „Ipoteza dacă și numai dacă Concluzia”:

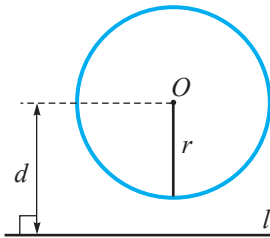
a) teorema 1 și reciproca ei; b) teorema 2 și reciproca ei.

• Aplicînd teorema 1, explicați cum poate fi găsit centrul necunoscut al unui cerc dat.

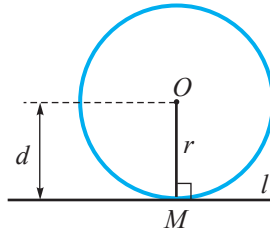
1.2. Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc

NE AMINTIM

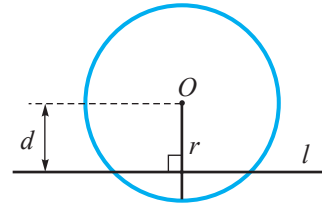
1 Examinați desenele (fig. 6, O este centrul cercului). Observați cum se numește dreapta l în fiecare caz.



dreaptă **exterioară**
cercului



dreaptă **tangentă** la cerc;
 M – punct de tangență



dreaptă **secantă**
la cerc

Fig. 6

• Fie d distanța de la centrul cercului $\mathcal{C}(O, r)$ la dreapta l . Completați adecvat:

a) Dreapta l este cercului $\mathcal{C}(O, r)$ dacă și numai dacă $d > r$.

b) Dreapta l este tangentă la cerc dacă și numai dacă .

c) Dreapta l este dacă și numai dacă $d < \text{input}$.

Teorema 3

Dacă o dreaptă este tangentă la un cerc, atunci ea este perpendiculară pe raza dusă în punctul de tangență.

*Să demonstrăm teorema 3.

Ipoteză: $\mathcal{C}(O, r) \cap l = \{M\}$.

Concluzie: $OM \perp l$.

Demonstrație:

Aplicăm metoda reducerii la absurd.

① Presupunem contrariul: $OM \not\perp l$.

* Opțional

Fie că perpendiculara pe l construită din punctul O intersectează l în punctul A (fig. 7).

- ② Fie $B \in l$, astfel încât $[AB] \equiv [AM]$.
- ③ $\triangle OAB \equiv \triangle OAM$ (Criteriul CC).
- ④ Conform ③, $[OB] \equiv [OM]$, adică $[OB]$ este rază. Prin urmare, $B \in \mathcal{C}(O, r)$.

Am obținut că dreapta l are două puncte comune (M și B) cu cercul – contradicție.

Deci, presupunerea $OM \not\perp l$ este greșită, adică $OM \perp l$. ►

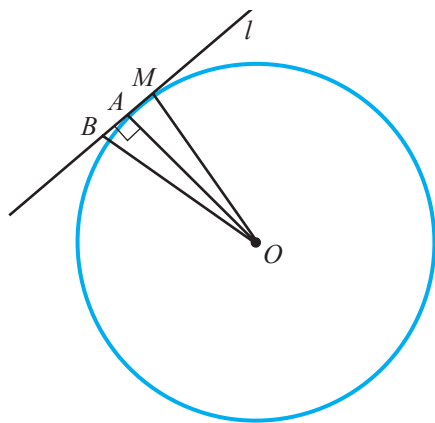


Fig. 7

Reciproca teoremei 3 de asemenea este teoremă.

- Formulați și demonstrați reciproca teoremei 3.

2 Problema de construcție (opțional)



Fie M un punct al cercului $\mathcal{C}(O, r)$ (fig. 8).

Să construim o dreaptă tangentă la cerc, astfel încât M să fie punctul de tangență.

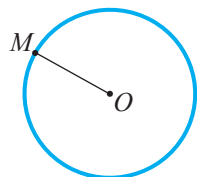


Fig. 8

Rezolvare:

- ① Construim raza OM (fig. 9).
- ② Construim perpendiculara AB pe dreapta OM :
 - construim $O_1 \in OM$, astfel încât $[O_1M] \equiv [OM]$;
 - construim $\mathcal{C}_1(O, r_1)$ și $\mathcal{C}_2(O_1, r_1)$, unde $r_1 > r$;
 - $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{A, B\}$.
- ③ Conform reciprocei teoremei 3, deoarece $AB \perp OM$ și $M \in \mathcal{C}(O, r)$, rezultă că AB este tangentă la cerc în punctul M .

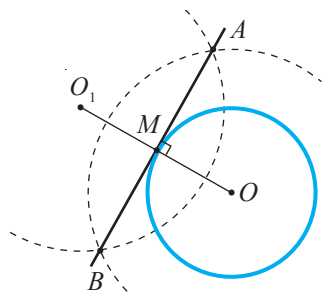


Fig. 9

Prin orice punct al cercului se poate construi o unică dreaptă tangentă la cerc în acest punct.

Problemă. Examinați desenul (fig. 10) și demonstrați că:

- a) $[AM] \equiv [BM]$;
- b) $[MO]$ este bisectoarea unghiului AMB .

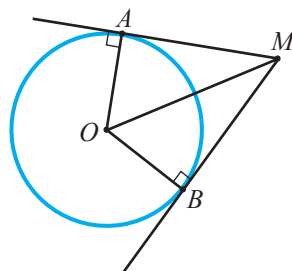


Fig. 10

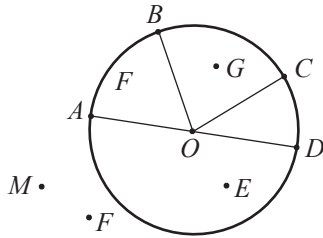
- Două tangente la același cerc, duse dintr-un punct exterior cercului, determină cu punctele de tangență două segmente congruente.
- Semidreapta cu originea într-un punct exterior și care conține centrul cercului este bisectoarea unghiului format de tangentele din acest punct la cerc.

Exerciții și probleme

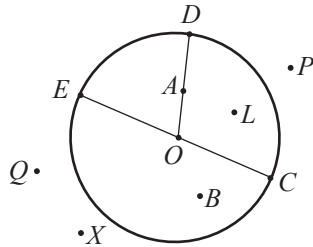
■ Fixăm cunoștințele

1. Construiți și notați un cerc:
 a) de centru A și rază 4 cm; b) de centru B și rază 6 cm.
2. Examinați desenul (O este centrul cercului) și numiți: razele; coardele; diametrele; punctele interioare cercului; punctele exterioare cercului; punctele diametral opuse.

a)

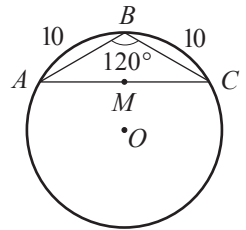


b)



3. Stabiliți poziția punctului A față de $\mathcal{C}(O, r = 6 \text{ cm})$, dacă distanța de la A la O este de:
 a) 6 cm; b) $3\sqrt{5}$ cm; c) 6,(6) cm; d) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})$ cm.
4. Coardele AB și CD ale unui cerc sînt situate la aceeași distanță de la centrul cercului. Aflați AB , dacă:
 a) $CD = 8$ cm; b) $AB + CD = 14$ cm; c) $AB + 2CD = 6\sqrt{10}$ cm; d) $5AB + CD = 12$ cm.
5. Diametrul AB intersectează coarda MN a aceluiași cerc de rază R sub un unghi drept în punctul E . Aflați distanța de la centrul cercului la MN , dacă:
 a) $ME = 9$ cm, $R = 15$ cm; b) $ME = 12$ cm, $R = 13$ cm; c) $4NE = 2R - 2$ cm = 32 cm.
6. Fie d distanța dintre dreapta l și centrul cercului $\mathcal{C}(O, r)$. Determinați poziția dreptei l față de cerc, dacă:
 a) $d = 3$ cm, $r = 4$ cm; b) $d = 6,3$ cm, $r = 3\sqrt{5}$ cm;
 c) $d = r = 2,7$ cm; d) $d = 0$ cm, $r = \frac{4}{9}$ cm;
 e) $d = \sqrt{3 - \sqrt{5}}$ cm, $r = \frac{2}{3 - \sqrt{5}}$ cm.

7. Aflați raza cercului și lungimea segmentelor AC și BM din desen, unde M este mijlocul segmentului AC .
8. Din punctul M exterior cercului au fost duse tangentele la cerc. Fie A și B punctele de tangență. Aflați BM , dacă:
 a) $AM = 13,7$ cm;
 b) $AM - 2BM = -3, (4)$ cm;
 c) $AB = 8$ cm, $m(\angle AMB) = 60^\circ$.



9. Mediatoarea segmentului nenul AB trece prin centrul cercului $\mathcal{C}(O, r)$. Stabiliți poziția dreptei AB față de cerc, dacă:
 a) $OA = 5$ cm, $r = 6$ cm; b) $OA = r = \frac{3}{4}$ cm;
 c) $OA = 14$ cm, $r = 12\frac{1}{5}$ cm și $AB = 12$ cm; d) $OA = 15$ cm, $r = 12$ cm și $AB = 18$ cm.

10. Fie $\mathcal{C}(O, r)$. Aflați distanța de la centrul cercului la coarda AB , dacă:
- a) $AB = 8$ cm, $r = 5$ cm; b) $AB = 24$ cm, $r = 13$ cm; c) $AB = a$, $r = b$.
11. Fie $[AB]$ o coardă a cercului $\mathcal{C}(O, r)$, iar d – distanța de la centrul cercului pînă la această coardă. Determinați r , dacă:
- a) $AB = 12$ cm, $d = 8$ cm; b) $AB = d = \sqrt{3}$ cm.
12. Care este măsura unghiului format de tangentele la un cerc, duse dintr-un punct aflat la o distanță de cerc egală cu raza cercului?
13. Construiți un cerc, știind că orice coardă a lui are cel mult 10 cm.
14. Fie cercul $\mathcal{C}(O, r = 8$ cm) și AB o coardă a lui. Folosind doar echerul, construiți mijlocul lui $[AB]$.
15. Distanța dintre centrul O al cercului și o coardă AB este de două ori mai mică decît raza. Determinați $m(\angle ABO)$.
16. Într-un cerc, la distanța de 6 cm de centru, este dusă o coardă de $12\sqrt{3}$ cm. Aflați raza cercului.
17. Stabiliți poziția punctului M față de $\mathcal{C}(O, r)$ dacă:
- a) $OM = \frac{1}{2}r$; b) $OM = |2 - \sqrt{5}|r$; c) $OM = \frac{2}{r}$.

Formăm capacitățile și aplicăm

18. Din punctul A , aflat la distanța de 29 cm de la centrul cercului $\mathcal{C}(O, r)$, a fost dusă tangenta AB la cerc (B este punctul de tangență). Determinați raza cercului, dacă $AB = 21$ cm.
19. Fie $A \in \text{Ext } \mathcal{C}(O, r = 5$ cm) și $C \in \mathcal{C}(O, r)$, astfel încît AC este tangentă la cerc. Aflați OA , dacă $m(\angle OAC) = 30^\circ$.
20. Fie $M \in \text{Ext } \mathcal{C}(O, r = 3,5$ cm) și $A \in \mathcal{C}(O, r)$, astfel încît AM este tangentă la cerc. Aflați OM , dacă $m(\angle AMO) = 30^\circ$.
21. Fie $M \in \text{Ext } \mathcal{C}(O, r)$ și $A \in \mathcal{C}(O, r)$, astfel încît AM este tangentă la cerc. Aflați raza cercului, dacă $m(\angle AMO) = 45^\circ$ și $AM = 7,5$ cm.
22. Fie $M \in \text{Ext } \mathcal{C}(O, r = \sqrt{15}$ cm) și $A \in \mathcal{C}(O, r)$, astfel încît AM este tangentă la cerc. Fie N mijlocul segmentului OM . Determinați AN , dacă $m(\angle AOM) = 60^\circ$.
23. **Matematica în viață.** Mihai a construit un cerc și a șters centrul. Cum construim centrul cu ajutorul riglei și compasului?
Indicație. Folosiți teorema 1 (pag. 142) și proprietatea mediatoarei unui segment.
24. Fie AM tangenta la $\mathcal{C}(O, R)$ în punctul A . Aflați distanța de la punctul O la punctul M , dacă:
- a) $AM = 0,8$, $r = 0,6$; b) $AM = 24$, $r = 18$; c) $AM = x$, $r = y$.
25. Demonstrați că mijloacele coardelor de aceeași lungime ale unui cerc sînt puncte conciclice (aparțin aceluiași cerc).
Indicație. Utilizați teorema 2 (pag. 142).

26. Cercurile $\mathcal{C}(O, r)$ și $\mathcal{C}(O_1, r)$ se intersectează în punctele M și N . Aflați OO_1 , dacă $MO = 13$ cm, $MO_1 = 6$ cm, $MN = 10$ cm.
Indicație. Pentru a construi $[AB]$ folosiți teorema înălțimii și relația $(\sqrt{15})^2 = 3 \cdot 5$.
27. Construiți un cerc de rază r ce trece prin punctele A și B date, dacă:
a) $AB = 5$ cm, $r = 6$ cm;
b) $AB = \sqrt{15}$ cm, $r = 5$ cm. *Indicație.* Pentru a construi $[AB]$ folosiți teorema înălțimii și relația $(\sqrt{15})^2 = 3 \cdot 5$.
28. Fie cercul $\mathcal{C}(O, r = 8$ cm). Construiți un triunghi ABC înscris în acest cerc, astfel încât $AB = 2BC = 10$ cm.
29. Utilizând doar rigla și compasul, construiți un unghi de:
a) 45° ; b) $22^\circ 30'$; c) $157^\circ 30'$.

■ ■ ■ Dezvoltăm capacitățile și creăm

30. $\mathcal{C}(O_1, R)$ și $\mathcal{C}(O_2, r)$ sînt exterioare, adică $O_1O_2 > R + r$. Dreapta l este tangentă ambelor cercuri în punctele A și respectiv B . Calculați O_1O_2 , dacă $m(\angle AO_1O_2) = 60^\circ$, $R = 15$ cm, $r = 5$ cm. Cercetați toate cazurile posibile.
31. Într-un triunghi dreptunghic un punct de tangență al cercului înscris în acest triunghi împarte ipotenuza în segmente cu lungimea de 5 cm și 12 cm. Aflați lungimile catetelor triunghiului.
32. Într-un cerc cu raza de 25 cm sînt duse, de aceeași parte a centrului, două coarde paralele, cu lungimile de 40 cm și 30 cm. Determinați distanța dintre aceste coarde.
33. Fie dreapta l și punctele M și N . Construiți un cerc care conține punctele M și N și al cărui centru aparține dreptei l . În ce situație problema:
a) are o singură soluție;
b) are o infinitate de soluții;
c) nu are nicio soluție?
34. Fie cercul $\mathcal{C}(O, r)$ și punctul M exterior cercului. Construiți prin M o dreaptă care taie cercul după o coardă de lungime x , unde:
a) $r = 10$ cm, $MO = 15$ cm, $x = 8$ cm;
b) $r = 8$ cm, $MO = 12$ cm, $x = 10$ cm.
Indicație. Utilizați teorema: Două coarde ale unui cerc sînt congruente dacă și numai dacă sînt egal depărtate de centrul cercului.

Matematică distractivă

35. Împărțiți cu ajutorul a doar trei tăieturi rectilinii un disc în:
a) 4 părți; b) 5 părți; c) 6 părți; d) 7 părți.
36. Dintr-un punct al cercului este coborîta o perpendiculară pe o rază a lui, astfel încît această rază este împărțită în două segmente proporționale cu 8 și 9, considerînd de la centru. Aflați lungimea perpendicularei, dacă raza cercului este de 68 cm.

§2. Unghiuri înscrise în cerc

2.1. Unghi la centru. Arce de cerc

NE AMINTIM

1 Care este măsura unghiului descris de minutarul unui ceas timp de 10 min?

Definiții

- ◆ Un unghi cu vârful în centrul unui cerc se numește **unghi la centru**.
- ◆ Intersecția cercului cu interiorul unghiului la centru se numește **arc mic** al cercului. *Notăm:* $\frown AB$, unde A și B sînt punctele de intersecție a unghiului la centru cu cercul.
- ◆ Intersecția cercului cu exteriorul unghiului la centru se numește **arc mare** al cercului. *Notăm:* $\smile ACB$, unde C aparține cercului, dar nu aparține arcului mic.
- ◆ Punctele A și B se numesc **capetele arcelor**. Arcele AB și ACB se numesc **arce complementare**. În afară de faptul că punctele A și B determină două arce, ele mai determină coarda AB . Se spune „coarda AB subîntinde arcul AB ”.
- ◆ **Măsura unui arc mic** este măsura unghiului la centru corespunzător arcului.
- ◆ **Măsura unui arc mare** este egală cu 360° minus măsura arcului complementar lui.
- ◆ Două **arce** ale aceluiași cerc (sau a două cercuri congruente) sînt **congruente** dacă au măsuri egale. Notăția $\frown AB \equiv \frown CD$ se citește: arcele AB și CD sînt congruente.
- ◆ Capetele unui diametru determină două arce congruente, numite **semicercuri**, fiecare cu măsura de 180° .

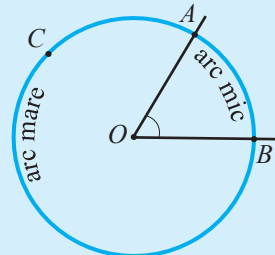


Fig. 12



INVESTIGĂM

- 2 Examinați desenul (fig. 13, O este centrul cercului). Utilizînd datele din desen și luînd în considerație că $\angle AOB \equiv \angle COD$ și $[AG] \equiv [EF]$, determinați:
- CD ;
 - $m(\angle FOE)$.

Rezolvare:

$$\triangle AOB \equiv \triangle COD \text{ (Criteriul LUL).}$$

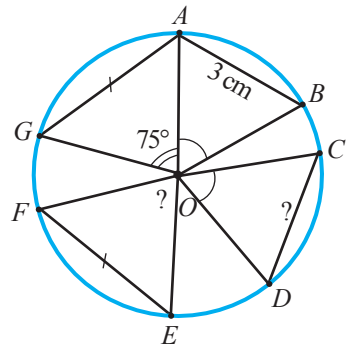


Fig. 13

Prin urmare, $CD = \square$ cm.

$\triangle AOG \equiv \square$ (Criteriul LLL).

$m(\angle FOE) = m(\angle \square) = \square^\circ$.

Răspuns: $CD = \square$ cm, $m(\angle FOE) = \square^\circ$.

Teorema 4

Dacă două coarde ale aceluiași cerc (sau a două cercuri congruente) sînt congruente, atunci arcele pe care le subîntind sînt congruente.

Reciproca teoremei 4 de asemenea este teoremă.

- Demonstrați teorema 4 și reciproca ei.

3

Problema de construcție (opțional)



Cum se poate construi un cerc, știind că o coardă de 3 cm subîntinde în acest cerc un arc de 70° ?

Rezolvare:

- ① Pentru a construi cercul, trebuie să construim un segment de lungimea razei (fig. 14).
- ② Considerăm construcția realizată (vezi desenul).
- ③ Fie $[OM]$ înălțimea a triunghiului isoscel AOB .

$\triangle OMB$ este dreptunghic, $m(\angle B) = 55^\circ$,

$BM = 1,5$ cm.

Prin urmare, conform criteriului CU, triunghiul OMB (în particular, ipotenuza OB) poate fi construit în mod univoc.

- ④ Construcția poate fi realizată în modul următor:
 - construim segmentul AB de 3 cm;
 - construim mediatoarea MM_1 a segmentului AB , unde M este mijlocul segmentului AB ;
 - construim $[BB_1]$, astfel încît $m(\angle MBB_1) = 55^\circ$;
 - $[MM_1] \cap [BB_1] = \{O\}$;
 - construim cercul $\mathcal{C}(O, OB)$.

- Utilizînd proprietățile triunghiurilor și ale unghiurilor obținute la intersecția a două drepte paralele de o secantă poate fi demonstrată:

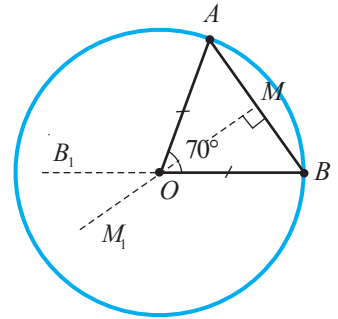
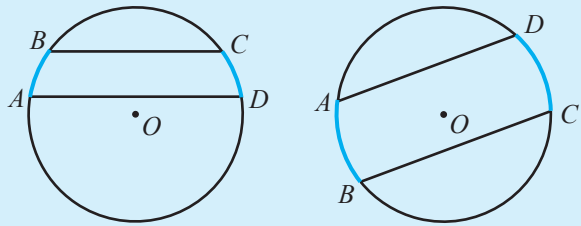


Fig. 14

Teorema 5

Două arce ale aceluiași cerc cuprinse între două coarde paralele sînt congruente (fig. 15).



$$AD \parallel BC \Rightarrow \frown AB \cong \frown CD$$

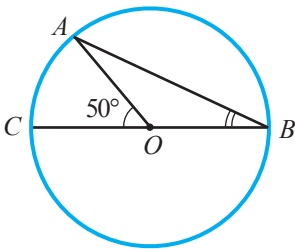
Fig. 15

2.2. Unghiuri înscrise în cerc

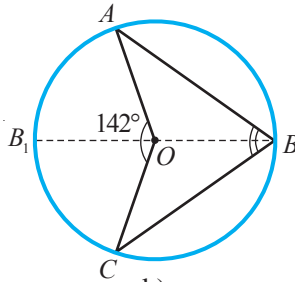


INVESTIGĂM

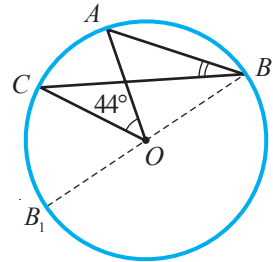
- Examinați desenele (fig. 16) și aflați $m(\angle ABC)$.



a)



b)



c)

Fig. 16

Rezolvare:

a) Examinăm $\triangle AOB$: $[AO] \cong [OB]$, deci $\angle B \cong \angle A$.

$\angle AOC$ este unghi exterior pentru $\angle AOB$, deci $m(\angle AOC) = m(\angle A) + m(\angle B)$.

$$m(\angle B) = \frac{1}{2} m(\angle \blacksquare) = \blacksquare^\circ.$$

b) Ca și în cazul a) $m(\angle ABB_1) = \frac{1}{2} m(\angle AOB_1)$, (1)

$$m(\angle B_1BC) = \frac{1}{2} m(\angle \blacksquare). \quad (2)$$

Adunînd relațiile (1) și (2), obținem

$$m(\angle ABB_1) + m(\angle B_1BC) = m(\angle ABC) = \frac{1}{2} m(\angle \blacksquare) = \blacksquare^\circ.$$

c) Similar cazurilor a) și b), obținem:

$$m(\angle ABC) = \frac{1}{2} m(\angle \blacksquare) = \blacksquare^\circ.$$

Teorema 6

Măsura unui unghi înscris în cerc este egală cu jumătate din măsura arcului cuprins între laturile unghiului (fig. 17).

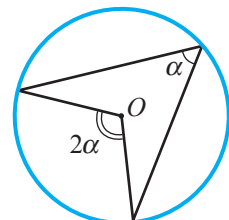


Fig. 17

Consecința 1

Unghiurile înscrise în același arc de cerc sînt congruente (fig. 18).

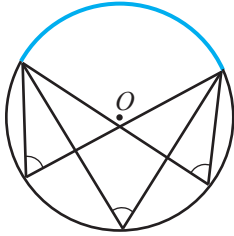


Fig. 18

Consecința 2

Unghiurile înscrise într-un semicerc sînt drepte (fig. 19).

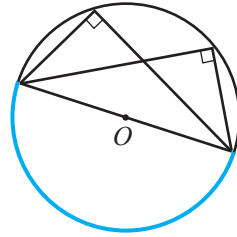


Fig. 19

Exercițiu. Desenul din figura 20 sugerează un algoritm de construire a tangențelor la un cerc de centru O dintr-un punct M dat, exterior cercului. Luînd în considerație consecința 2, explicați acest algoritm.

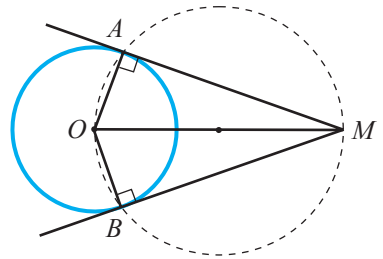
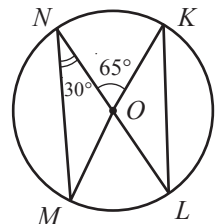
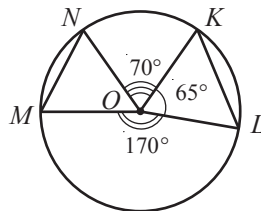
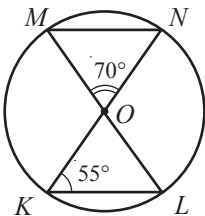


Fig. 20

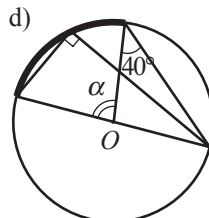
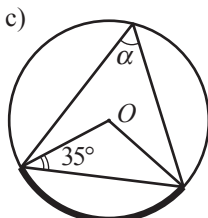
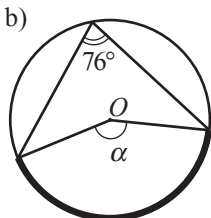
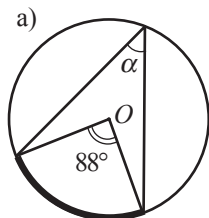
Exerciții și probleme

■ Fixăm cunoștințele

- Desenați și notați un unghi la centru de măsură α al cercului $\mathcal{C}(O, r)$, unde:
 - $\alpha = 60^\circ$, $r = 4$ cm;
 - $\alpha = 90^\circ$, $r = 6$ cm;
 - $\alpha = 120^\circ$, $r = \sqrt{5}$ cm.
- Punctele A, B, C aparțin unui cerc și $B \in \overset{\frown}{AC}$.
 - Aflați $m(\overset{\frown}{BC})$, dacă $m(\overset{\frown}{AC}) = 120^\circ$, $m(\overset{\frown}{AB}) = 75^\circ$.
 - Aflați $m(\overset{\frown}{AC})$, dacă $m(\overset{\frown}{AB}) = 35^\circ$, $m(\overset{\frown}{BC}) = 55^\circ$.
 - Aflați $m(\overset{\frown}{AB})$, dacă $m(\overset{\frown}{AC}) = 150^\circ$, $m(\overset{\frown}{AC}) + m(\overset{\frown}{BC}) = 175^\circ$.
- Comparați MN și KL din următoarele figuri (O este centrul cercului):
 -
 -
 -



4. Calculați măsura unghiului α (O este centrul cercului):



5. Cîte grade are unghiul la centru corespunzător arcului:

a) de $\frac{1}{3}$ din cerc;

b) $\frac{1}{5}$ din cerc;

c) $\frac{1}{10}$ din cerc;

d) $\frac{1}{12}$ din cerc;

e) $\frac{1}{6}$ din semicerc;

f) $\frac{1}{12}$ din semicerc?

6. Construiți unghiul ABC format de secanta AC și tangenta AB ale aceluiași cerc, astfel încît:

a) $m(\angle ABC) = 40^\circ$;

b) $m(\angle ABC) = 75^\circ$;

c) $m(\angle ABC) = 350^\circ$.

7. Construiți unghiul ABC cu vârful B în interiorul cercului, astfel încît:

a) $m(\angle ABC) = 25^\circ$;

b) $m(\angle ABC) = 115^\circ$;

c) $m(\angle ABC) = 210^\circ$.

8. Construiți unghiul ABC cu vârful B în exteriorul cercului, astfel încît:

a) $m(\angle ABC) = 70^\circ$;

b) $m(\angle ABC) = 127^\circ$;

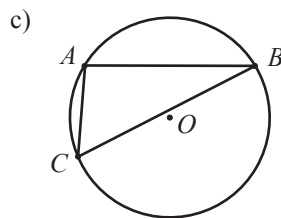
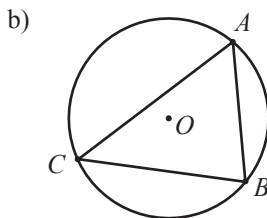
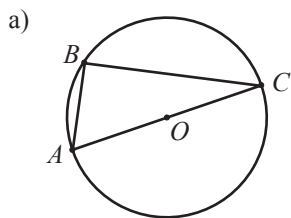
c) $m(\angle ABC) = 165^\circ$.

9. Aflați diametrul cercului în care este înscris triunghiul ABC cu unghiul drept B și:

a) $AC = 8\text{ cm}$, $BC = 4\text{ cm}$;

b) $AB = 20\text{ cm}$, $BC = 21\text{ cm}$.

10. Fără a măsura, stabiliți tipul (ascuțitunghic, dreptunghic, obtuzunghic) triunghiului ABC (O este centrul cercului) din desen.



11. Punctele A, B, C, D sînt situate, în această ordine, pe un cerc. $[AC]$ și $[BD]$ sînt diametre perpendiculare. Determinați tipul patrulaterului $ABCD$.

12. Punctele A, B, C, D sînt situate, în această ordine, pe un cerc. $[AC]$ și $[BD]$ sînt diametre neperpendiculare. Determinați tipul patrulaterului $ABCD$.

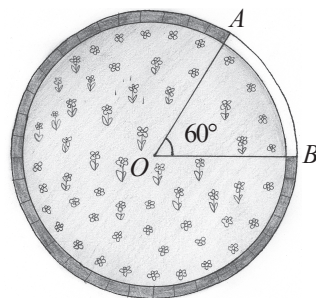
13. Punctele A, B, C, D sînt situate, în această ordine, pe un cerc de centru O și $AB \parallel CD$. Aflați:

a) $m(\angle AOD)$, dacă $m(\angle BOC) = 50^\circ$;

b) $m(\angle BOC)$, dacă $m(\angle DAO) = 70^\circ$;

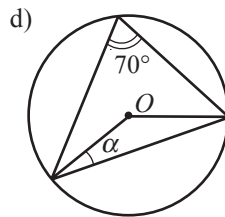
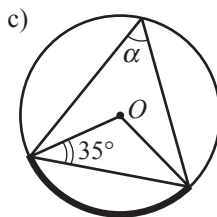
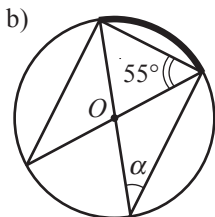
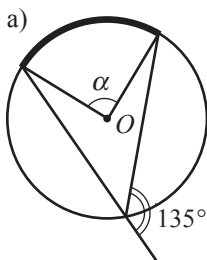
c) $m(\angle ADO)$, dacă $m(\angle BCO) = 65^\circ$.

14. Domnul Albu a vopsit o porțiune din bordura ce împrejmuiește un răz de flori în 10 minute (vezi desenul). În câte minute va reuși să vopsească porțiunea rămasă a bordurii?
15. Fie ABC un unghi format de secanta AB și tangenta AC (A este punctul de tangență) la un cerc de centru O . Aflați $m(\angle BAC)$, dacă $m(\angle AOB) = 80^\circ$.



Formăm capacitățile și aplicăm

16. Punctele A, B, C, D, E sînt situate, în această ordine, pe un cerc. Aflați măsurile arcelor AB, BC, CD, DE, A , dacă ele sînt direct proporționale cu numerele 3, 4, 2, 3.
17. Punctele A, B, C, D, E sînt situate, în această ordine, pe un cerc. Aflați măsurile arcelor AB, BC, CD, DE, A , dacă ele sînt invers proporționale cu numerele 1, 2, 3, 6.
18. Dintr-un punct al cercului sînt duse două coarde perpendiculare cu lungimile de 35 cm și 12 cm. Determinați raza cercului.
19. Cîte arce și cîte coarde există cu capetele:
- a) în 3 puncte ale unui cerc; b) în 7 puncte ale unui cerc; c) în n puncte ale unui cerc?
20. Împărțiți un cerc în șase arce, astfel încît măsurile lor să fie proporționale cu numerele 1, 3, 6, 7, 8, 11.
21. Calculați măsura unghiului α (O este centrul cercului):

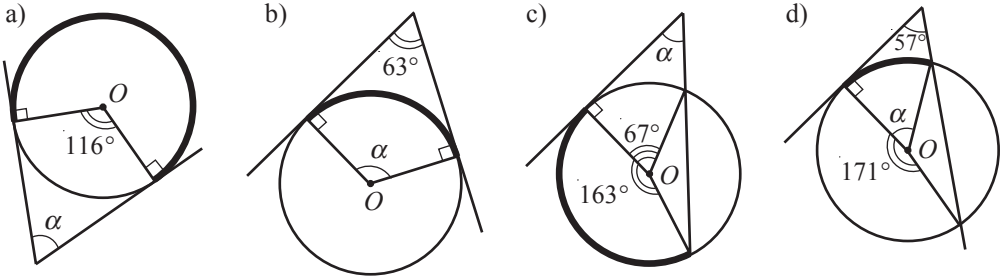


22. Care este măsura arcului descris de minutarul unui ceas la un interval de:
- a) 20 de minute; b) 25 de minute; c) 4 minute; d) 35 de minute?
23. Punctele A și B aparțin unui cerc, astfel încît $m(\text{arc } AB) = 120^\circ$. Aflați raza cercului, dacă $AB = 6\sqrt{3}$ cm.
24. Coardele AB și AC ale unui cerc sînt congruente și au fiecare lungimea de 16 cm. Aflați raza cercului, dacă $m(\text{arc } BC) = 120^\circ$.
25. Fie AB o coardă a unui cerc. Prin punctul A se duce tangenta AC la cerc, iar prin punctul B – o coardă BD . Determinați $m(\angle BAC)$, dacă $m(\angle BDA) = 80^\circ$.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

26. Laturile unui unghi cu măsura de 60° sînt tangente la un cerc de rază 20 cm. Aflați distanța dintre punctele de tangență.
27. Laturile unui triunghi dreptunghic sînt tangente la un cerc. Unul dintre punctele de tangență împarte o catetă în segmente de lungimi de 3 cm și 5 cm. Determinați lungimea ipotenuzei.

28. Calculați măsura unghiului α (O este centrul cercului):



29. Folosind rigla și compasul, construiți un arc de:

- a) 60° ; b) 30° ; c) 120° ; d) 15° .

30. Se cunoaște un unghi de 19° . Construiți (doar cu rigla și compasul) un unghi de:

- a) 9° . *Indicație.* $180^\circ = 19^\circ \cdot 9 + 9^\circ$. b) 5° ; c) 1° .

31. Se dă un unghi de 25° . Construiți, folosind rigla și compasul, un unghi de:

- a) 10° . *Indicație.* $100^\circ = 25^\circ \cdot 4 = 90^\circ + 10^\circ$. b) 5° ; c) 20° .

32. Fie $\mathcal{C}(O, r = 4 \text{ cm})$ și punctul A exterior lui. Construiți tangentele AM și AN ale cercului.

33. O coardă a unui cerc are lungimea de 30 cm. Printr-o extremitate a acestei coarde este dusă o tangentă la cerc, iar prin cealaltă extremitate este dusă o coardă cu lungimea de 36 cm, paralelă cu tangenta. Aflați raza cercului.

34. Într-un cerc de rază 2 cm este construită o coardă de 1 cm. Printr-o extremitate a acestei coarde este dusă o tangentă la cerc, iar prin cealaltă extremitate este dusă o coardă paralelă cu tangenta. Determinați lungimea acestei coarde.

§3. Cercuri înscrise. Cercuri circumscrise

3.1. Cercuri înscrise



INVESTIGĂM

1 Cum poate fi construit un punct M pe latura AB a triunghiului ABC , egal depărtat de celelalte două laturi (fig. 21)?

Rezolvare:

- ① Mulțimea punctelor egal depărtate de semidreptele $[CA$ și $[CB$ este bisectoarea unghiului C . Prin urmare, $\{M\} = [AB] \cap [CC_1]$, unde $[CC_1$ este bisectoarea unghiului C .

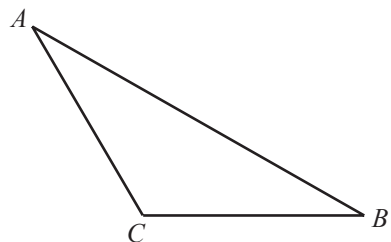
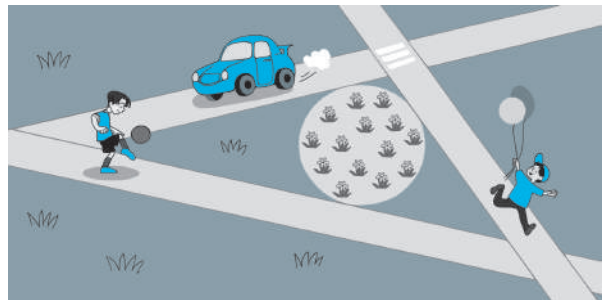


Fig. 21

② Construcția bisectoarei unghiului C se realizează astfel (fig. 22):

- construim $\mathcal{C}(C, r)$, $[AC] \cap \mathcal{C}(C, r) = \{O_1\}$,

$$[BC] \cap \mathcal{C}(C, r) = \{O_2\};$$

- construim $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$, $\mathcal{C}_2(O_2, r_1)$, unde $r_1 > \frac{O_1O_2}{2}$.

$$\mathcal{C}_1(O_1, r_1) \cap \mathcal{C}_2(O_2, r_1) = \{C_1, C_2\},$$

unde C_1 aparține interiorului unghiului C .

- $[CC_1]$ este bisectoarea unghiului C .

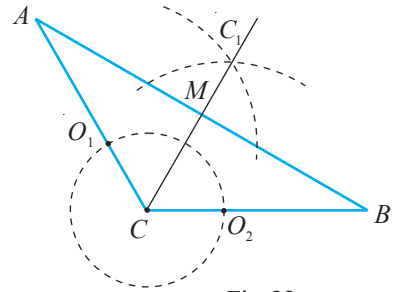


Fig. 22

Proprietatea bisectoarei

Orice punct al bisectoarei unui unghi este egal depărtat de laturile acestuia.

Exerciții. 1. Explicați cum se construiește în interiorul unui triunghi un punct egal depărtat de laturile triunghiului. Prin ce mai este semnificativ acest punct?

2. Examinați desenul (fig. 23) și explicați de ce în interiorul patrulaterului $ABCD$ nu se poate construi un punct egal depărtat de laturile patrulaterului.

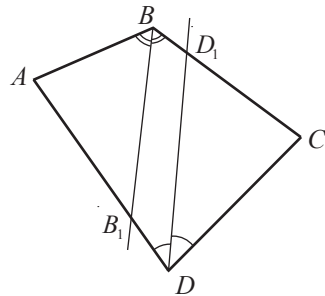


Fig. 23

Definiții

◆ Un cerc se numește **înscris într-un poligon convex** dacă laturile poligonului sînt tangente la acest cerc. În acest caz, poligonul se numește **poligon circumscris cercului** (fig. 24).

◆ Dacă într-un poligon convex poate fi înscris un cerc, atunci poligonul se numește **poligon circumscriptibil**.

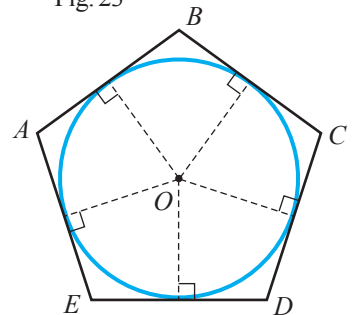


Fig. 24

Observație. Centrul cercului înscris într-un poligon este egal depărtat de laturile poligonului.

• Aplicînd proprietatea bisectoarei unui unghi, demonstrați următoarea teoremă.

Teorema 7

În orice triunghi poate fi înscris un cerc. Centrul acestui cerc este punctul de intersecție a bisectoarelor triunghiului (fig. 25).

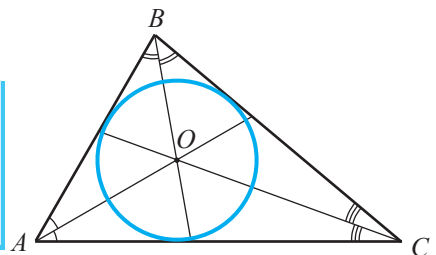


Fig. 25

2 În patrulaterul $ABCD$ este înscris un cerc. Utilizând datele din figura 26, aflați DC .

Rezolvare:

Fie T_1, T_2, T_3, T_4 punctele de tangență (fig. 27), unde $T_1 \in [AB], T_2 \in [BC], T_3 \in [CD], T_4 \in [AD]$.

Conform proprietății tangențelor duse din același punct exterior cercului:

$$[AT_1] \equiv [AT_4], [BT_1] \equiv [BT_2], [CT_2] \equiv \square, \square \equiv [DT_4].$$

Prin urmare, $AB + DC =$

$$= AT_1 + T_1B + CT_3 + T_3D_4 = AT_4 + BT_2 + CT_2 + \square = \\ = (AT_4 + \square) + (BT_2 + CT_2) = \square + BC. (*)$$

Din (*) rezultă că $DC = \square + BC - AB$.

$$DC = \square \text{ cm} + 9 \text{ cm} - 10 \text{ cm} = \square \text{ cm}.$$

Răspuns: \square cm.

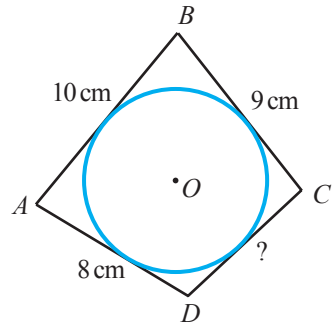


Fig. 26

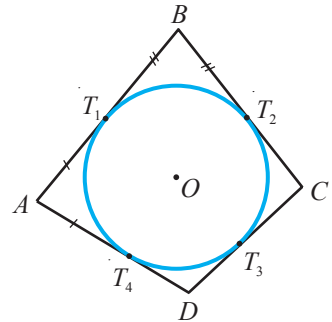


Fig. 27

Teorema 8

Dacă sumele lungimilor laturilor opuse ale unui patrulater convex sînt egale, atunci în acest patrulater poate fi înscris un cerc.

• Formulați și demonstrați reciproca teoremei 8, care de asemenea este teoremă.

3.2. Cercuri circumscrise

INVESTIGĂM

1 Care dintre următoarele poligoane pot fi construite într-un cerc dat, astfel încît vîrfurile poligonului să aparțină cercului:

- | | |
|--------------------------|---------------------|
| a) triunghi isoscel; | e) dreptunghi; |
| b) triunghi echilateral; | f) romb arbitrar; |
| c) triunghi scalen; | g) trapez arbitrar; |
| d) pătrat; | h) trapez isoscel? |



Definiții

- ◆ Un **cerc** se numește **circumscriș unui poligon convex** dacă vîrfurile poligonului aparțin cercului. În acest caz, poligonul se numește **poligon înscris în cerc** (fig. 28).
- ◆ Dacă unui poligon i se poate circumscrie un cerc, atunci poligonul se numește **poligon inscripșibil**.

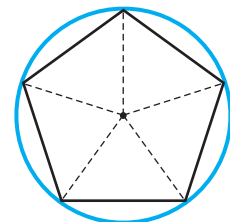


Fig. 28

Observație. Centrul cercului circumscris unui poligon este egal depărtat de vîrfurile poligonului.

• Aplicînd proprietatea punctelor mediatorei unui segment, demonstrați următoarea teoremă.

Proprietatea mediatorei

Punctele mediatorei unui segment sînt egal depărtate de capetele segmentului.

Teorema 9

Oricărui triunghi i se poate circumscrie un cerc. Centrul acestui cerc este punctul de intersecție a mediatoarelor triunghiului (fig. 29).

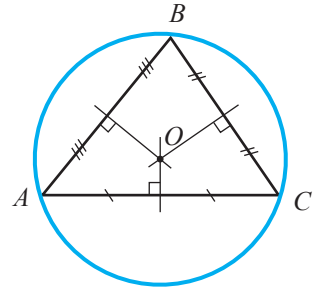


Fig. 29

Problemă. Depinde oare de tipul triunghiului poziția față de triunghi a centrului cercului circumscris acestui triunghi?

2 Examinați desenul (fig. 30) și aflați măsurile unghiurilor B și C .

Rezolvare:

① Cercetăm arcele $\frown BD$ și $\frown BAD$:

$m(\frown BAD) = 360^\circ - m(\frown BD)$, deoarece $\frown BAD$ este arc mare complementar arcului mic $\frown BD$.

② $m(\frown BD) = 2m(\angle A)$, deoarece $\frown BD$ este cuprins între laturile unghiului A .

$$m(\frown BD) = 2 \cdot 64^\circ = 128^\circ.$$

③ $m(\frown BAD) = 360^\circ - \blacksquare^\circ = \blacksquare^\circ$. $m(\angle C) = \frac{1}{2}m(\frown BAD) = \blacksquare^\circ = 180^\circ - 64^\circ$.

④ În mod similar obținem că $m(\angle B) = \blacksquare^\circ = 180^\circ - \blacksquare^\circ = 180^\circ - m(\angle \blacksquare)$.

Răspuns: $m(\angle B) = \blacksquare^\circ$; $m(\angle C) = \blacksquare^\circ$.

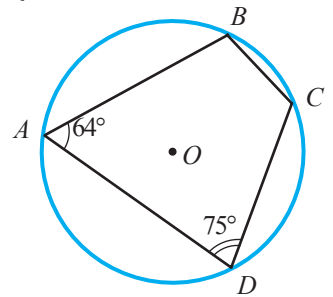


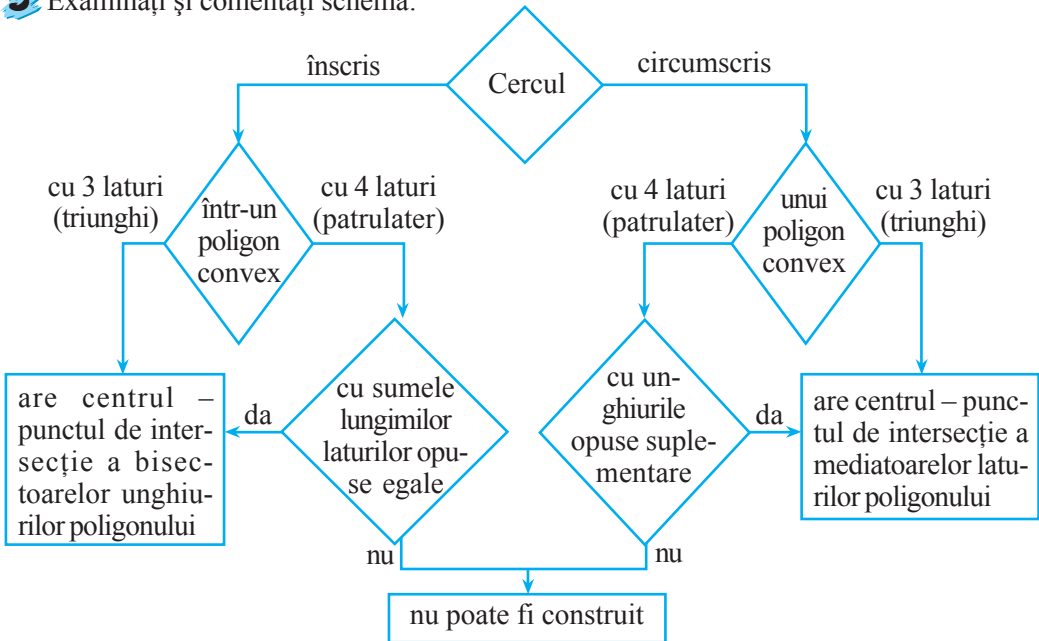
Fig. 30

Teorema 10

Dacă unghiurile opuse ale unui patrulater sînt suplementare, atunci acestui patrulater i se poate circumscrie un cerc.

• Formulați reciproca teoremei 10, care de asemenea este teoremă.

3 Examinați și comentați schema:



• Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției:

- În orice triunghi poate fi înscris un cerc.
- În orice patrulater convex poate fi înscris un cerc.
- Oricărui triunghi i se poate circumscrie un cerc.
- Oricărui patrulater convex i se poate circumscrie un cerc.
- Suma măsurilor unghiurilor opuse ale unui patrulater înscris este egală cu 180° .
- Sumele lungimilor laturilor opuse ale unui patrulater circumscriș unui cerc sînt egale.

Pentru cei curioși!

Dacă a este latura unui triunghi echilateral, iar R și r razele cercului circumscriș, respectiv înscris în acest triunghi, atunci $R = a\sqrt{3}$, iar $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

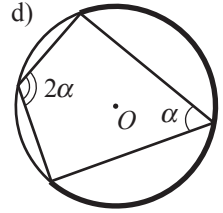
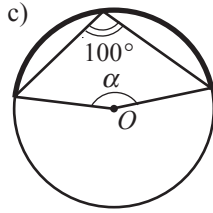
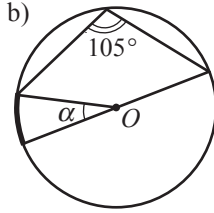
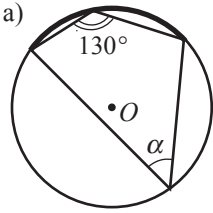
- În care dintre următoarele figuri geometrice putem înscrie un cerc:

a) triunghi scalen;	b) triunghi isoscel;	c) triunghi echilateral;
d) patrulater convex oarecare;	e) paralelogram oarecare;	f) romb oarecare;
g) dreptunghi oarecare;	h) pătrat?	
- Fie $\mathcal{C}(O, r = 5 \text{ cm})$. Construiți:

a) un triunghi scalen înscris în cerc;	b) un triunghi dreptunghic înscris în cerc;
c) un triunghi obtuzunghic înscris în cerc;	d) un dreptunghi înscris în cerc;
e) un pătrat înscris în cerc.	
- Fie M, N, K punctele de tangență ale unui cerc cu laturile triunghiului ABC , astfel încît $M \in [AB], N \in [BC], K \in [AC]$. Aflați perimetrul triunghiului ABC , dacă:

a) $AB = 12 \text{ cm}, KC = 6 \text{ cm};$	b) $BN = 12 \text{ cm}, AC = 15 \text{ cm}.$
---	--

4. Calculați măsura unghiului α (O este centrul cercului):



5. Fie M, N, K punctele de tangență ale laturilor triunghiului ABC cu cercul înscris în triunghi. Aflați măsurile unghiurilor triunghiului MNK , dacă:

a) $m(\angle A) = 76^\circ$, $m(\angle B) = 48^\circ$;

b) $m(\angle A) = 110^\circ$, $m(\angle C) = 40^\circ$.

6. Calculați lungimile segmentelor determinate de vîrfurile unui triunghi și punctele de tangență ale cercului înscris în triunghi, dacă lungimile laturilor triunghiului sînt de:

a) 12 cm, 8 cm, 9 cm;

b) 17 cm, 13 cm, 14 cm.

7. Vîrfurile triunghiului ABC aparțin cercului $\mathcal{C}(O, r)$. Stabiliți tipul triunghiului (ascuțitunghic, obtuzunghic, dreptunghic), dacă:

a) $O \in \text{Int} \Delta ABC$;

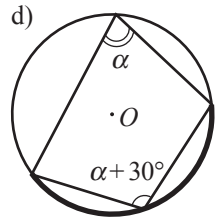
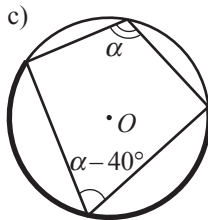
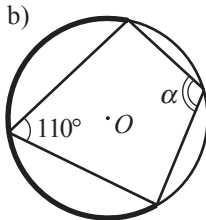
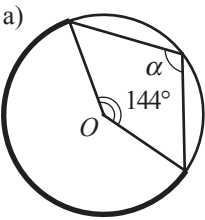
b) $O \in \text{Ext} \Delta ABC$;

c) $O \in AB$;

d) $O \in AC$.

8. Cercul înscris în triunghiul isoscel ABC atinge laturile laterale AB și AC în punctele M și respectiv N , iar baza – în punctul K . Aflați AM și BK , dacă $AB = 25$ cm, $BC = 14$ cm.

9. Calculați măsura unghiului α (O este centrul cercului):

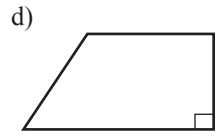
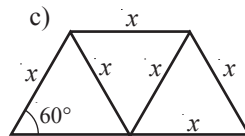
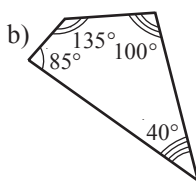
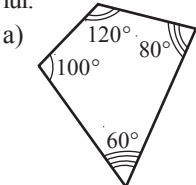


Formăm capacitățile și aplicăm

10. Construieți un triunghi cu laturile de 8 cm, 9 cm, 10 cm și cercul circumscris acestuia.

11. Construieți un triunghi cu laturile de 8 cm, 9 cm, 12 cm și cercul înscris în acest triunghi.

12. Reproduceți desenul. Stabiliți dacă patrulaterul este inscriptibil și construieți cercul circumscris lui:



13. Înălțimea unui triunghi dreptunghic corespunzătoare ipotenuzei împarte ipotenuza în două segmente cu lungimile de 9 cm și 16 cm.

14. Fie M, N, K punctele de tangență ale laturilor triunghiului ABC cu cercul înscris în triunghi. Aflați măsurile unghiurilor triunghiului MNK , dacă:

a) $m(\angle A) = 30^\circ$, $m(\angle B) = 75^\circ$; b) $m(\angle B) = 44^\circ$, $m(\angle C) = 52^\circ$; c) $m(\angle A) = 106^\circ$, $m(\angle C) = 38^\circ$.

15. Construiți triunghiul ABC cu laturile de:
 a) 10 cm, 10 cm, 8 cm; b) 6 cm, 8 cm, 10 cm; c) 12 cm, 8 cm, 5 cm.
 Construiți cercul circumscris triunghiului ABC . Stabiliți cu ajutorul riglei dacă proiecțiile ortogonale ale punctului arbitrar M de pe cerc pe laturile triunghiului sînt sau nu coliniare. Trageți concluzia.
16. Fie M, N, K punctele de tangență ale laturilor triunghiului ABC cu cercul înscris în triunghi. Aflați măsura unghiurilor triunghiului ABC , dacă: a) $m(\angle MNK) = 40^\circ$, $m(\angle MKN) = 80^\circ$;
 b) $m(\angle MNK) = 65^\circ$, $m(\angle KMN) = 48^\circ$; c) $m(\angle MKN) = 44^\circ$, $m(\angle KMN) = 52^\circ$.
17. Raza cercului circumscris unui triunghi isoscel este de 3,125 cm, iar raza cercului înscris în acest triunghi – de 1,5 cm. Aflați lungimile laturilor triunghiului, știind că, exprimate în centimetri, ele reprezintă numere întregi.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

18. Demonstrați că un trapez este inscriptibil dacă este trapez isoscel.
19. Fie $ABCD$ pătrat cu latura de 18 cm, $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, astfel încît $AM = 6$ cm, $BN = 4$ cm. Aflați raza cercului circumscris triunghiului DMN .
20. Triunghiul echilateral ABC este înscris în cercul $\mathcal{C}(O, r = 6$ cm). Cercul $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ este tangent la cercul $\mathcal{C}(O, r)$ și la laturile AB și BC ale triunghiului. Aflați O_1A .
Indicație. Folosiți faptul că punctul O_1 se află pe o bisectoare a triunghiului ABC .

Exerciții și probleme recapitulative

Fixăm cunoștințele

1. a) Construiți un cerc de rază 5 cm. Construiți coardele AB de 5 cm, BC de 6 cm, diametrele MN și KL .
 b) Măsurați unghiurile LMK și LNK .
2. Stabiliți poziția punctului A față de $\mathcal{C}(O, r = 7\sqrt{3}$ cm), dacă:
 a) $OA = \frac{19}{2\sqrt{3}}$ cm; b) $OA = (4\sqrt{3} + 2\sqrt{5})$ cm; c) $OA = \frac{21}{\sqrt{3}}$ cm; d) $OA = (7 + \sqrt{3})$ cm.
3. Punctele A, B, C aparțin $\mathcal{C}(O, r = 6,5$ cm), astfel încît $[AB]$ este diametru. Aflați AC , dacă $BC = 12$ cm.
4. Fie $\mathcal{C}(O, r = 8\sqrt{5}$ cm) și coardele AB și CD congruente.
 Aflați $d(O, AB)$, dacă $d(O, CD) = 6$ cm.
5. Fie $\mathcal{C}(O, r = \sqrt{19}$ cm). Determinați lungimea coardei AB , dacă $d(O, AB) = \sqrt{6}$ cm.
6. Desenați și notați un unghi la centru de 45° al cercului $\mathcal{C}(O, r = 6$ cm).
7. Punctele M, N, K, L sînt situate, în această ordine, pe un cerc. Aflați:
 a) $m(\sphericalangle MN)$, dacă $m(\sphericalangle ML) = 115^\circ$, $m(\sphericalangle NL) = 55^\circ$;
 b) $m(\sphericalangle NK)$, dacă $m(\sphericalangle MK) = 37^\circ$, $m(\sphericalangle NL) = 65^\circ$, $m(\sphericalangle ML) = 85^\circ$;
 c) $m(\sphericalangle KL)$, dacă $m(\sphericalangle MN) = 39^\circ$, $m(\sphericalangle MK) = 94^\circ$, $m(\sphericalangle NL) = 122^\circ$.
8. Construiți în $\mathcal{C}(O, r = 4,5$ cm) un unghi înscris de: a) 100° ; b) 160° ; c) 240° ; d) 180° .

9. Coardele AB și CD se intersectează în punctul M interior cercului. Aflați:
- AM , dacă $CM = 18$ cm, $MD = 3$ cm, $MB = 9$ cm;
 - MB , dacă $AM = \sqrt{7}$ cm, $CM = 3,5$ cm, $MD = 8$ cm.
10. Punctele A, B, C, D sînt situate, în această ordine, pe cerc și $AB \cap CD = \{M\}$. Aflați:
- CM , dacă $AM = 24$ cm, $MB = 8$ cm, $MD = 16$ cm;
 - MD , dacă $AM = \frac{2}{3}$ cm, $MB = \frac{3}{4}$ cm, $CM = 1$ cm.
11. Punctele A, B, C sînt situate pe cercul de centru O . Aflați:
- $m(\angle ABC)$, dacă $m(\angle AOC) = 104^\circ$;
 - $m(\angle AOC)$, dacă $m(\angle ABC) = 37^\circ$;
 - $m(\angle OAC)$, dacă $m(\angle AOC) = 88^\circ$;
 - $m(\angle ACO)$, dacă $m(\angle ABC) = 29^\circ$.
12. Care este măsura arcului descris de minutarul unui ceas la un interval de:
- 5 minute;
 - 25 de minute;
 - 45 de minute?

Formăm capacitățile și aplicăm

13. Construieți triunghiul ABC cu laturile de $\sqrt{5}$ cm, $2\sqrt{5}$ cm, $3\sqrt{2}$ cm și cercul circumscris lui.
14. Punctele A, B, C aparțin $\mathcal{C}(O, r = 2\sqrt{6}$ cm), astfel încît $[AB]$ este diametru. Determinați BC , dacă $OM = 4$ cm, unde M este mijlocul segmentului BC .
15. Folosind echerul și compasul, construiți un unghi de: a) 135° ; b) $157^\circ 30'$.
16. Diametrul AB al cercului de rază $2\sqrt{17}$ cm intersectează coarda CD în mijlocul ei – M . Aflați AM și BD , dacă $CM = 5\sqrt{2}$ cm.
17. Mediatoarea coardei AB intersectează cercul în punctele C și D . Aflați raza cercului, dacă $AB = 14$ cm și $d(C, AB) = 4$ cm.
18. Din punctul M s-au dus tangentele la $\mathcal{C}(O, r = 6$ cm), punctele A și B fiind puncte de tangență. Determinați OM , dacă $AM = 9$ cm.
19. Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC înscris în cerc, dacă:
- $m(\sphericalangle AB) = 50^\circ$, $m(\sphericalangle AC) = 80^\circ$;
 - $m(\sphericalangle AB) = 46^\circ$, $m(\sphericalangle AC) = 74^\circ$.
20. Patrulaterul $ABCD$ este înscris într-un cerc. Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului, măsurile unghiurilor formate de laturi și diagonale, dacă:
- $m(\sphericalangle AB) = 62^\circ$, $m(\sphericalangle BC) = 86^\circ$, $m(\sphericalangle AD) = 110^\circ$;
 - $m(\sphericalangle AB) = 25^\circ$, $m(\sphericalangle BC) = 55^\circ$, $m(\sphericalangle AD) = 140^\circ$.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

21. Trapezul isoscel $ABCD$ cu baza mare AD este circumscris unui cerc. Aflați raza cercului, dacă $AB = 20$ cm, $BC = 8$ cm.

22. Calculați măsura unghiului α (O este centrul cercului):

a)

b)

c)

23. Demonstrați că măsura unghiului cu vîrfurile în interiorul cercului este egală cu semisuma măsurii arcului cuprins între laturile sale și a arcului cuprins între prelungirile laturilor sale.

Test sumativ

Timp efectiv de lucru:
45 de minute



Varianta I

1. a) Desenați un cerc cu centrul M și raza de 3 cm. Construiți diametrul BD , coardele DA și BA , precum și tangenta la cerc în punctul A . **3 p**
- b) Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: „Dacă $MX = (\sqrt{3} + 2)$ cm, atunci punctul X este exterior cercului.” Justificați. **2 p**
- c) Știind că $m(\angle AMB) = 50^\circ$, aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABD . **4 p**
- d) Știind că $m(\angle AMB) = 50^\circ$, aflați măsura unghiului format de tangenta construită și coarda DA . **3 p**
2. Fie cercul cu centru O și raza de 13 cm. Diametrul AB este perpendicular pe coarda MN de 24 cm și o intersectează în punctul C . **3 p**
 - a) Aflați distanța de la punctul O la coarda MN .
 - b) În ce raport punctul C împarte diametrul AB ? **3 p**
3. În trapezul isoscel $ABCD$ cu bazele BC de 9 cm și AD de 25 cm este înscris un cerc cu centrul O . **3 p**
 - a) Aflați lungimea laturii laterale a trapezului.
 - b) Determinați raza cercului. **4 p**
 - c) Demonstrați că triunghiul AOB este dreptunghic. **4 p**

Varianta II

1. a) Desenați un cerc cu centrul N și raza de 2 cm. Construiți diametrul AB , coardele AC și BC , precum și tangenta la cerc în punctul A . **3 p**
- b) Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: „Dacă $NY = (\sqrt{5} - 1)$ cm, atunci punctul Y este exterior cercului.” Justificați. **2 p**
- c) Știind că $m(\angle CBA) = 40^\circ$, aflați măsurile unghiurilor triunghiului ACN . **4 p**
- d) Știind că $m(\angle CBA) = 40^\circ$, aflați măsura unghiului format de tangenta construită și coarda AC . **3 p**
2. Coarda AB de 40 cm a cercului de centru O este perpendiculară pe diametrul DC , îl intersectează în punctul K și se află la 21 cm de centrul cercului. **3 p**
 - a) Aflați raza cercului.
 - b) În ce raport punctul K împarte diametrul DC ?
3. În trapezul isoscel $ABCD$ cu laturile laterale AB de 24 cm, CD de 25 cm este înscris un cerc cu centrul Q . **3 p**
 - a) Aflați raza cercului.
 - b) Determinați lungimea bazelor trapezului.
 - c) Demonstrați că triunghiul CDQ este dreptunghic. **4 p**

Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	29–28	27–25	24–21	20–17	16–13	12–10	9–7	6–5	4–3	2–1

§ 1. Noțiunea de arie

Am întâlnit noțiunea de arie în clasele anterioare, când am calculat aria pătratului, a dreptunghiului. De fapt, am calculat aria suprafeței mărginite de aceste poligoane.

Reuniunea poligonului convex și a interiorului său se numește **suprafață poligonală convexă**. Reuniunea unui număr finit de suprafețe poligonale convexe este o **suprafață poligonală**.

Aria este un număr ce caracterizează o suprafață poligonală. Totuși, prin tradiție, în loc de aria suprafeței poligonale vom spune aria poligonului. Notăm aria poligonului $A_1A_2\dots A_n$ prin $\mathcal{A}_{A_1A_2\dots A_n}$.

Admitem ca fiind evidente următoarele proprietăți ale ariei:

- 1° Aria poligonului este un număr nenegativ.
- 2° Ariile poligoanelor congruente sînt egale.
- 3° Aria unui poligon este suma ariilor poligoanelor, cu interioarele disjuncte fiecare două, în care se descompune poligonul dat.
- 4° Aria pătratului cu laturile de lungime 1 este egală cu 1.

Deci, dacă laturile pătratului sînt de 1 m, atunci aria lui este egală cu un metru pătrat (se scrie m^2); dacă latura pătratului este de 1 cm, atunci aria lui este egală cu un centimetru pătrat (se scrie cm^2) etc.

Poligoanele cu ariile egale se numesc **poligoane echivalente**.

§ 2. Aria paralelogramelor

2.1. Aria pătratului, aria dreptunghiului, aria rombului

NE AMINTIM

1 Calculați aria pătratului cu laturile de 2,5 cm.

Rezolvare:

Aria pătratului cu laturile de lungime a se calculează cu formula $\mathcal{A} = a^2$. Deci, $\mathcal{A} = 2,5^2 = 6,25$ (cm^2).

2 Fie pătratul $ABCD$ (fig. 1).

- Comparați ariile triunghiurilor ABC și ADC .
- Calculați aria triunghiului ABC , dacă laturile pătratului sînt de 3 cm.

Rezolvare:

a) $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$ (Criteriul CC). Deci, conform proprietății 2°, $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ADC}$.

b) Conform proprietății 3°, $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{ACD} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \mathcal{A}_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 3^2 = 4,5 \text{ (cm}^2\text{)}.$

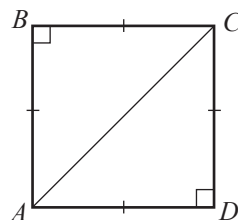


Fig. 1

GENERALIZĂM

Aria pătratului cu laturile de lungime a este a^2 .

Aria triunghiului dreptunghic isoscel cu lungimile catetelor egale cu a este $\frac{a^2}{2}$.

3 Calculați aria dreptunghiului cu laturile de 7,2 cm și 1,1 cm.

Rezolvare:

Aria dreptunghiului cu lungimile laturilor a și b se calculează cu formula $\mathcal{A} = a \cdot b$.
 Prin urmare, $\mathcal{A} = 7,2 \cdot 1,1 = 7,92 \text{ (cm}^2\text{)}.$

4 Fie dreptunghiul $ABCD$ (fig. 2).

- Comparați ariile triunghiurilor ABC și ADC .
- Calculați aria triunghiului ABC , dacă laturile dreptunghiului sînt de 6 cm și 12 cm.

Rezolvare:

a) $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$ (Criteriul CC). Deci, conform proprietății 2°, $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ADC}$.

b) Conform proprietății 3°, $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{ACD} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \mathcal{A}_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 = 36 \text{ (cm}^2\text{)}.$

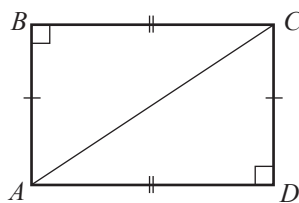


Fig. 2

GENERALIZĂM

Aria dreptunghiului cu lungimile laturilor a și b este $\mathcal{A} = a \cdot b$.

Aria triunghiului dreptunghic cu lungimile catetelor a și b este $\mathcal{A} = \frac{1}{2} a \cdot b$.



INVESTIGĂM

- 5** Calculați aria rombului $ABCD$ cu $AC = 13,4$ cm și $BD = 18$ cm.

Rezolvare:

Fie O punctul de intersecție a diagonalelor rombului. Diagonalele rombului sînt perpendiculare și punctul de intersecție le înjumătățește.

Triunghiurile dreptunghice AOB , COB , COD , AOD sînt congruente. Prin urmare, $\mathcal{A}_{ABCD} = 4 \cdot \mathcal{A}_{AOB} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{AC}{2} \cdot \frac{BD}{2} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 13,4 \cdot 18 = 120,6$ (cm²).

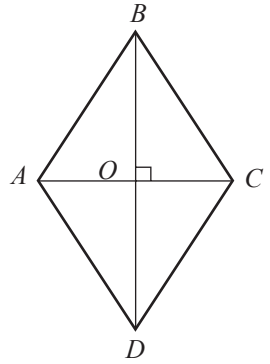


Fig. 3

GENERALIZĂM

Aria rombului este egală cu semiprodusul lungimilor diagonalelor.

$$\mathcal{A}_{\text{romb}} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}, \text{ unde } d_1 \text{ și } d_2 \text{ sînt lungimile diagonalelor rombului.}$$

2.2. Aria paralelogramului oarecare



INVESTIGĂM

- 1** Fie paralelogramul $ABCD$ și $[BM]$, $[CN]$ – înălțimi ale lui (fig. 4).
- Comparați ariile triunghiurilor ABM și DCN .
 - Calculați aria paralelogramului $ABCD$, dacă $MB = 8$ cm și $AD = 11$ cm.

Rezolvare:

a) $\triangle ABM \equiv \triangle DCN$ (Criteriul CI). Deci, conform proprietății 2°, $\mathcal{A}_{ABM} = \mathcal{A}_{DCN}$.

b) Conform proprietății 3°, $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{MBCD} + \mathcal{A}_{ABM} =$

$$= \mathcal{A}_{MBCD} + \mathcal{A}_{DCN} = \mathcal{A}_{MBCN}.$$

$MBCN$ este dreptunghi și $\mathcal{A}_{MBCN} = MB \cdot BC = MB \cdot AD = 8 \cdot 11 = 88$ (cm²).

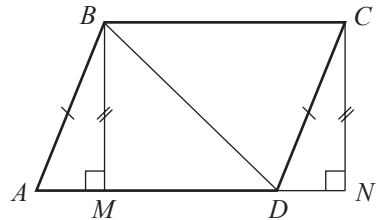


Fig. 4

GENERALIZĂM

Aria paralelogramului este egală cu produsul dintre lungimea unei laturi și înălțimea corespunzătoare acestei laturi.

$$\mathcal{A}_{\text{par}} = a \cdot h, \text{ unde } h \text{ este înălțimea corespunzătoare laturii de lungime } a.$$

§ 3. Aria triunghiului



INVESTIGĂM

1 Calculați aria triunghiului ABC cu înălțimea BM , dacă $AC = 16$ cm, $BM = 8$ cm.

Rezolvare:

Triunghiurile AMB și BMC sînt dreptunghice (fig. 5).

Prin urmare, $\mathcal{A}_{AMB} = \frac{1}{2} BM \cdot AM$, $\mathcal{A}_{BMC} = \frac{1}{2} BM \cdot MC$.

Deci, $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{AMB} + \mathcal{A}_{BMC} = \frac{1}{2} BM \cdot AM + \frac{1}{2} BM \cdot MC =$
 $= \frac{1}{2} BM (AM + MC) = \frac{1}{2} BM \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 8 = 64 \text{ (cm}^2\text{)}.$

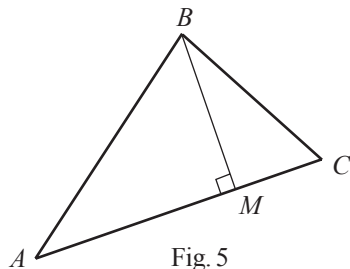


Fig. 5

GENERALIZĂM ȘI AFLĂM

- **Aria triunghiului** este egală cu semiprodusul dintre lungimea unei laturi și înălțimea corespunzătoare acestei laturi.

$\mathcal{A} = \frac{1}{2} a \cdot h$, unde h este înălțimea corespunzătoare laturii de lungime a a triunghiului.

- **Formula lui Herone:**

$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, unde a, b, c sînt lungimile laturilor triunghiului, iar

$p = \frac{a+b+c}{2}$ este semiperimetrul lui.

Teorema 1

Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.

2 Fie triunghiul ABC și $M \in (AC)$, astfel încît

$\frac{AM}{MC} = 4$ (fig. 7). Calculați $\frac{\mathcal{A}_{ABM}}{\mathcal{A}_{BMC}}$.

Rezolvare:

Construim punctul $N \in AC$, astfel încît $BN \perp AC$.

Așadar, $[BN]$ este înălțimea comună a triunghiurilor ABM și BMC .

Avem $\frac{\mathcal{A}_{ABM}}{\mathcal{A}_{BMC}} = \frac{\frac{1}{2} BN \cdot AM}{\frac{1}{2} BN \cdot MC} = \frac{AM}{MC} = 4.$

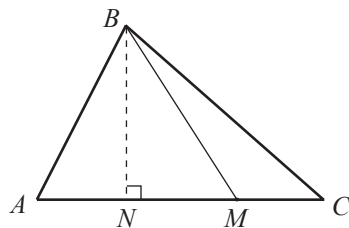


Fig. 7

Teorema 2

Fie triunghiul ABC și $M \in (AC)$. Atunci $\frac{\mathcal{A}_{ABM}}{\mathcal{A}_{BMC}} = \frac{AM}{MC}$.

Consecință. O mediană a unui triunghi descompune triunghiul în două triunghiuri echivalente.

§ 4. Aria trapezului



INVESTIGĂM

- 1** Fie trapezul $TRAP$ cu baza mare TP de lungime a , baza mică RA de lungime b și înălțimea h .
Calculați aria trapezului.

Rezolvare:

Construim punctele $M \in RA$ și $N \in TP$, astfel încât $TM \perp RA$, $AN \perp TP$ (fig. 8). Evident, $TM = AN = h$.

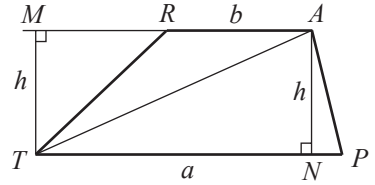


Fig. 8

$$\text{Atunci } \mathcal{A}_{TRAP} = \mathcal{A}_{TRA} + \mathcal{A}_{TAP} = \frac{1}{2} TM \cdot RA + \frac{1}{2} AN \cdot TP = \frac{1}{2} h \cdot b + \frac{1}{2} h \cdot a = \frac{1}{2} h(a + b).$$

GENERALIZĂM

Aria trapezului cu bazele de lungimile a și b și înălțimea h se calculează cu formula

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} h(a + b) = h \cdot m, \text{ unde } m \text{ este lungimea liniei mijlocii a trapezului.}$$

- 2** Fie trapezul $ABCD$ cu $AD \parallel BC$ (fig. 9).

- a) Comparați \mathcal{A}_{ABD} și \mathcal{A}_{ACD} , \mathcal{A}_{ABC} și \mathcal{A}_{BCD} .
b) Fie $\{I\} = AC \cap BD$. Comparați \mathcal{A}_{ABI} și \mathcal{A}_{CID} .

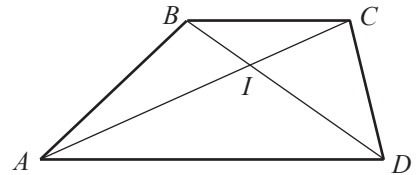


Fig. 9

Rezolvare:

a) Înălțimile triunghiurilor ABD și ACD , coborâte din vîrfurile B și C pe latura comună AD , sînt înălțimi ale trapezului. Prin urmare, triunghiurile ABD și ACD sînt echivalente, adică $\mathcal{A}_{ABD} = \mathcal{A}_{ACD}$. Similar, se poate arăta că $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{BCD}$.

b) $\mathcal{A}_{ABI} = \mathcal{A}_{ABD} - \mathcal{A}_{AID}$, $\mathcal{A}_{CID} = \mathcal{A}_{ACD} - \mathcal{A}_{AID}$.

Dar conform a), $\mathcal{A}_{ABD} = \mathcal{A}_{ACD}$. Prin urmare, $\mathcal{A}_{ABI} = \mathcal{A}_{CID}$.

GENERALIZĂM

- Diagonalele unui trapez și laturile neparallele formează cu una dintre baze triunghiuri echivalente.
Triunghiurile formate de diagonalele unui trapez cu laturile neparallele sînt echivalente.

§ 5. Aria poligonului regulat. Lungimea cercului și aria discului

1 Știind că m este lungimea apotemei, iar l – lungimea laturii, calculați aria poligonului regulat cu: a) 6 laturi; b) n laturi.

Rezolvare:

a) Poligonul regulat cu 6 laturi se numește hexagon regulat.

Fie O centrul cercului înscris în hexagonul regulat $ABCDEF$ (fig. 10). Evident că triunghiurile AOB , BOC , COD , DOE , EOF și AOF sînt congruente și suma ariilor lor este egală cu aria hexagonului $ABCDEF$.

Prin urmare,

$$\mathcal{A}_{ABCDEF} = 6 \cdot \mathcal{A}_{AOB}. \quad (1)$$

Fie $[OM]$ înălțime a triunghiului AOB . Deoarece $\triangle AOB$ este isoscel, rezultă că $[OM]$ este și apotemă, adică $OM = m$.

$$\mathcal{A}_{AOB} = \frac{1}{2} OM \cdot AB = \frac{1}{2} m \cdot l. \quad (2)$$

Substituind (2) în (1), obținem:

$$\mathcal{A}_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{1}{2} ml = 3ml.$$

Răspuns: $3ml$.

b) Fie $A_1A_2 \dots A_n$ un poligon regulat cu n laturi, iar O – centrul cercului înscris în acest poligon (fig. 11).

Similar cazului a), dacă unim punctul O cu vîrfurile poligonului, obținem n triunghiuri congruente și

$$\mathcal{A}_{A_1, A_2 \dots A_n} = n \cdot \mathcal{A}_{A_1OA_2}.$$

Dar $\mathcal{A}_{A_1OA_2} = \frac{1}{2} ml$.

Prin urmare, $\mathcal{A}_{A_1, A_2 \dots A_n} = \frac{1}{2} mnl$.

Răspuns: $\frac{1}{2} mnl$.

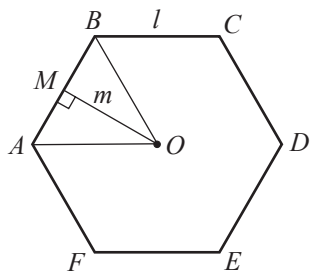


Fig. 10

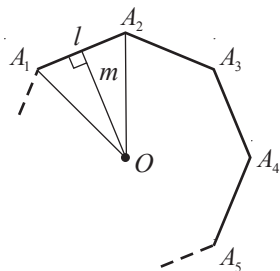


Fig. 11

GENERALIZĂM

⇒ Aria poligonului regulat cu n laturi, apotema de lungime m și latura de lungime l se calculează cu formula $\mathcal{A}_n = \frac{1}{2} m \cdot n \cdot l$.

2 Fie un cerc cu raza 1. Se poate arăta că în acest cerc poate fi înscris orice poligon regulat cu n laturi. Calculînd perimetrele acestor poligoane, obținem, de exemplu:

pentru $n = 4$, $P_4 = 4\sqrt{2} \approx 5,656854$;

pentru $n = 8$, $P_8 = 8\sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 6,12253492$;

pentru $n = 16$, $P_{16} = 16\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \approx 6,24289030$;

pentru $n = 32$, $P_{32} = 32\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \approx 6,27309698$.

Observăm că perimetrele obținute sînt aproximativ egale. Este firesc, deoarece fiecare dintre ele aproximează cu o anumită exactitate lungimea cercului de rază 1. Evident, cu cît poligonul regulat are mai multe laturi, cu atît mai corect va fi calculată lungimea acestui cerc.

Perimetrele calculate aproximează dublul numărului irațional $\pi \approx 3,14159\dots$

Deci, lungimea cercului de rază 1 este 2π .

Se poate demonstra formula

$$L = 2\pi R,$$

unde L este lungimea cercului, iar R – raza lui.

3. Calculați aria $\mathcal{D}(O, R)$.

Rezolvare:

În $\mathcal{C}(O, R)$ înscriem un poligon regulat cu n laturi.

Aria acestui poligon este $\mathcal{A}_n = \frac{1}{2}n \cdot l \cdot m$, unde l este lungimea laturii, iar m – lungimea apotemei poligonului.

Cu cît este mai mare n , cu atît mai bine $n \cdot l$ aproximează lungimea cercului, iar m – raza R a cercului. De aceea, putem considera $\mathcal{A}_{\text{discului}} = \frac{1}{2}L \cdot R$, unde L este lungimea cercului ce mărginește discul.

Prin urmare, deoarece $L = 2\pi R$, obținem $\mathcal{A}_{\text{discului}} = \pi R^2$.

Exerciții și probleme

■ Fixăm cunoștințele

- Calculați perimetrul și aria pătratului cu laturile de:
 - 3 cm;
 - 3,7 cm;
 - $6\sqrt{5}$ cm;
 - $7\frac{2}{9}$ cm.
- Aflați lungimea laturii pătratului, dacă aria lui este de:
 - 225 cm²;
 - 48 cm²;
 - $16\frac{1}{8}$ cm²;
 - $(\sqrt{3} - 2)^2$ cm².
- Calculați aria triunghiului dreptunghic isoscel cu catetele de lungime:
 - 2,7 cm;
 - 3,5 cm;
 - $(2 + \sqrt{3})$ cm;
 - $\frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2}$ cm.
- Aflați lungimea catetei unui triunghi dreptunghic isoscel, dacă aria lui este de:
 - 72 cm²;
 - 120 cm²;
 - $2\frac{1}{12}$ cm²;
 - $(2\sqrt{5} - 5)^2$ cm².
- Calculați aria dreptunghiului cu laturile de:
 - 4,4 cm și 1,2 cm;
 - $4\sqrt{7}$ cm și $2\sqrt{7}$ cm;
 - $(2\sqrt{31} + \sqrt{29})$ cm și $(2\sqrt{31} - \sqrt{29})$ cm;
 - $11\frac{1}{16}$ cm și $\frac{256}{177}$ cm.

6. Aflați perimetrul și aria triunghiului dreptunghic cu catetele de:
 a) 3 dm și 40 cm; b) 12 cm și 50 mm; c) 0,8 m și 60 cm; d) 120 mm și 1,2 dm.
7. Determinați dimensiunile dreptunghiului cu aria \mathcal{A} și perimetrul \mathcal{P} , dacă:
 a) $\mathcal{A} = 18,25 \text{ cm}^2$, $\mathcal{P} = 19,6 \text{ cm}$; b) $\mathcal{A} = 110 \text{ cm}^2$, $\mathcal{P} = 32\sqrt{2} \text{ cm}$;
 c) $\mathcal{A} = \frac{14}{27} \text{ cm}^2$, $\mathcal{P} = 1\frac{4}{9} \text{ cm}$; d) $\mathcal{A} = 32 \text{ cm}^2$, $\mathcal{P} = 36 \text{ cm}$.
8. Două loturi de pământ au formă de pătrate cu laturile respectiv de 15 m și 25 m. Aflați cealaltă dimensiune a unui lot de pământ de formă dreptunghiulară, echivalent cu loturile date, dacă o dimensiune este de 50 m.
9. Fie $ABCD$ paralelogram, $h_1 = d(A, BC)$, $h_2 = d(B, CD)$ și \mathcal{A} – aria paralelogramului. Completați tabelul:

AB	BC	h_1	h_2	\mathcal{A}
	15	12	10	
$5\sqrt{5}$	5		$3\sqrt{5}$	
		7	10,5	210
	18		9	162

10. Fie h_a, h_b, h_c înălțimile unui triunghi corespunzătoare respectiv laturilor a, b, c , iar \mathcal{A} – aria triunghiului. Completați tabelul:

a	b	c	h_a	h_b	h_c	\mathcal{A}
6	12		10		5	
	15		12	10	9	
14,4		16		12		144
24	30				21	210

11. Fie triunghiul ABC . Aflați aria triunghiului, dacă:
 a) $AB = 6 \text{ cm}$, $BC = 7 \text{ cm}$, $AC = 9 \text{ cm}$;
 b) $AB = 18 \text{ cm}$, $BC = 9\sqrt{3} \text{ cm}$, $AC = 8\sqrt{3} \text{ cm}$;
 c) $AB = 10 \text{ cm}$, $BC = 12 \text{ cm}$, $m(\angle A) = 90^\circ$.
12. Fie h înălțimea trapezului $ABCD$ cu baza mare AB . Determinați ariile triunghiurilor ABC, ABD, ADC, DCB , dacă:
 a) $AB = 11 \text{ cm}$, $CD = 8 \text{ cm}$, $h = 9 \text{ cm}$; b) $AB = 7\sqrt{5} \text{ cm}$, $CD = 4\sqrt{5} \text{ cm}$, $h = 5\sqrt{5} \text{ cm}$;
 c) $AB = 9\frac{15}{22} \text{ cm}$, $CD = \frac{90}{11} \text{ cm}$, $h = 11 \text{ cm}$; d) $AB = 12 \text{ cm}$, $AD = 7 \text{ cm}$, $m(\angle A) = m(\angle B) = 45^\circ$.
13. Fie h înălțimea, m lungimea liniei mijlocii, iar \mathcal{A} aria trapezului $ABCD$ cu baza mare AB . Completați tabelul:

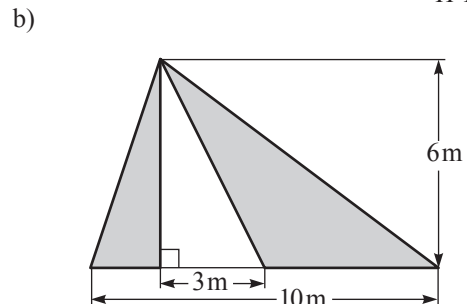
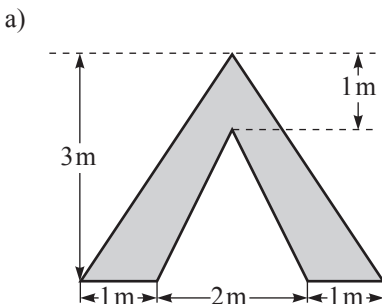
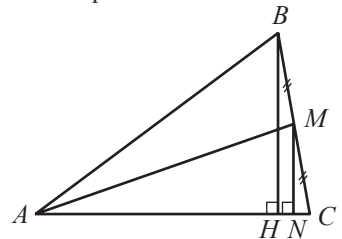
AB	CD	h	m	\mathcal{A}
10	6	7		
18		22	16	
32		20		560

14. Determinați lungimea și aria cercului cu raza de:
 a) 10 cm; b) 15 cm; c) 8 cm.

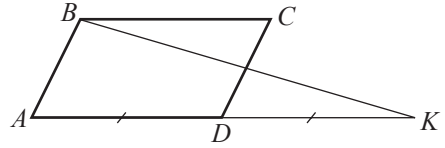
15. Aflați aria paralelogramului cu unghiul ascuțit de 45° , dacă una dintre diagonalele lui este de 9 cm și coincide cu o înălțime.
16. Aria unui paralelogram cu înălțimile de 8 cm și 6 cm este egală cu 72 cm^2 . Aflați perimetrul paralelogramului.
17. Punctul E se află pe latura BC a paralelogramului $ABCD$ cu aria de 104 cm^2 . Aflați aria triunghiului ABE .
18. Aflați aria discului mărginit de un cerc cu lungimea de $4\pi \text{ m}$.

Formăm capacitățile și aplicăm

19. Raza cercului circumscris unui poligon regulat cu n laturi este de 4 cm. Calculați aria poligonului, dacă: a) $n = 6$; b) $n = 8$; c) $n = 10$.
20. Aflați perimetrul și aria pătratului cu diagonalele de:
a) $12\sqrt{2} \text{ cm}$; b) 18 cm; c) $a\sqrt{2} \text{ cm}$; d) $x \text{ cm}$.
21. De câte ori se va mări aria pătratului, dacă latura lui se va mări:
a) de 3 ori; b) de 7 ori; c) de n ori?
22. De câte ori se va micșora diagonala pătratului, dacă aria lui se va micșora:
a) de 4 ori; b) de 10 ori; c) de $(\sqrt{11} - 4)^2$ ori?
23. De câte ori se va mări aria dreptunghiului, dacă:
a) o latură a lui se va mări de 4 ori; b) fiecare latură se va mări de 5 ori;
c) o latură se va mări de 8 ori, iar alta se va micșora de 3 ori?
24. Aflați aria trapezului isoscel $ABCD$ cu înălțimea BH de 7 cm, dacă punctul H împarte baza AD în două segmente, cel mai lung fiind de 9 cm.
25. Aflați aria unui trapez dreptunghic cu bazele de 12 cm și 9 cm, iar latura laterală de 6 cm.
26. Vîrfurile unui trapez se află pe un cerc cu raza de 13 cm și centrul pe baza trapezului. Aflați aria trapezului dacă înălțimea lui este de 12 cm.
27. O diagonală a rombului a fost mărită cu 40%, alta – cu 20%. Cu câte procente s-a mărit aria rombului?
28. Examinați desenul. Știind că $AB = 20 \text{ cm}$, $BH = 12 \text{ cm}$, $AM = 18 \text{ cm}$, aflați aria triunghiului ABC .
29. Pentru 1 m^2 de suprafață se utilizează 100 g de vopsea. De câtă vopsea vom avea nevoie pentru a acoperi următoarea suprafață?



30. Fie paralelogramul $ABCD$ și punctul K situat pe dreapta AD , astfel încât $AD = DK$. Aflați aria paralelogramului $ABCD$, dacă $\mathcal{A}_{BDK} = 24 \text{ cm}^2$.



31. Aflați aria triunghiului dreptunghic, știind că suma lungimilor catetelor este egală cu 11 cm, iar suma pătratelor lor este egală cu 61 cm^2 .

32. Calculați aria unui trapez cu diagonalele de 113 cm și 17 cm, iar înălțimea de 15 cm.

33. Calculați raza unui disc, știind că aria lui este egală cu suma ariilor a două discuri cu razele de 5 cm și 12 cm.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

34. Diagonala AC a paralelogramului $ABCD$ intersectează înălțimea BE în punctul O , astfel încât $\frac{BO}{OE} = \frac{5}{3}$. Aflați aria patrulaterului $BEDC$, dacă aria paralelogramului $ABCD$ este de 100 cm^2 .

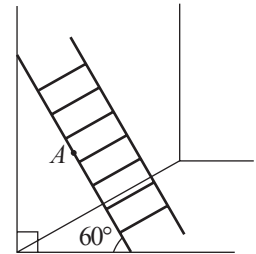
35. Punctul E aparține laturii AD a dreptunghiului $ABCD$, astfel încât $\frac{AE}{ED} = \frac{m}{n}$. Determinați aria patrulaterului $BEDC$, dacă aria dreptunghiului $ABCD$ este S .

36. Centrul cercului înscris în triunghiul isoscel ABC cu baza AC împarte înălțimea BM în raportul $\frac{17}{15}$. Aflați perimetrul și aria triunghiului, dacă raza cercului este de 7,5 cm.

37. Aflați aria trapezului cu bazele de 7 cm și 20 cm și diagonalele de 13 cm și $5\sqrt{10}$ cm.

38. Determinați mulțimea punctelor M din interiorul triunghiului ABC isoscel cu AC , știind că $\mathcal{A}_{ABM} = \mathcal{A}_{BCM}$.

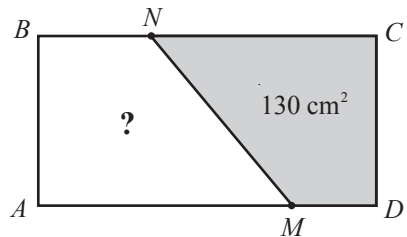
39. O scară se sprijină de un perete vertical sub un unghi de 60° față de podea. Scara alunecă de-a lungul peretelui pînă atinge cu capetele de sus podeaua. Aflați lungimea traiectoriei descrise de punctul A , aflat la jumătatea scării (vezi desenele), dacă lungimea scării este egală cu 6 m.



40. Determinați aria unui trapez cu bazele de 2 cm și 3 cm, iar diagonalele de 3 cm și 4 cm.

41. Bisectoarea unghiului drept al unui triunghi dreptunghic împarte ipotenuza în raportul 3 : 4. Aflați aria triunghiului, dacă lungimea ipotenuzei este de 35 cm.

42. Punctele M și N se află pe laturile AD și BC ale dreptunghiului $ABCD$ (vezi desenele), astfel încât $\frac{DM}{AM} = 0,25$, $\frac{CN}{BN} = 2$. Aflați \mathcal{A}_{ABNM} , dacă $\mathcal{A}_{DMNC} = 130 \text{ cm}^2$.



43. Într-un trapez isoscel este înscris un cerc de rază r . Determinați aria trapezului, dacă baza mare este de 2 ori mai lungă decît baza mică.

44. Construiți 4 triunghiuri necongruente echivalente.

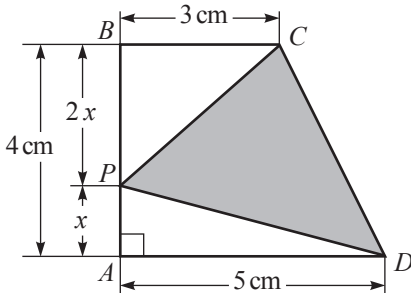
45. Împărțiți un triunghi în 5 triunghiuri echivalente.



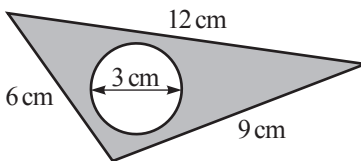
Varianta I

1. Completați:

- a) Aria dreptunghiului cu laturile de 4 cm și 8 cm este egală cu .
- b) Aria triunghiului dreptunghic avînd catetele de 6 cm și 11 cm este egală cu .
- c) Aria paralelogramului cu o latură de 18 cm și înălțimea corespunzătoare acestei laturi de 5 cm este egală cu .
- d) Aria rombului cu diagonalele de 13 cm și 9 cm este egală cu .

2. $ABCD$ este un trapez dreptunghic.

- a) Determinați aria trapezului $ABCD$. **2 p**
- b) Aflați AP . **2 p**
- c) Aflați aria domeniului colorat. **4 p**
3. Examinați desenul. Determinați:
- a) aria discului; **3 p**
- b) aria domeniului colorat. **4 p**

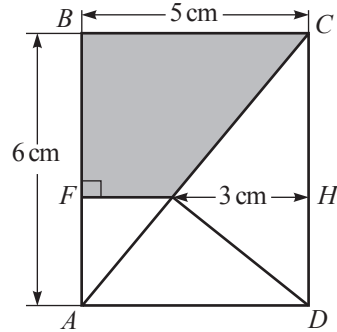


4. Fie punctele $A(-7, 2)$, $B(-3, 10)$, $C(9, 4)$. Aflați: a) aria triunghiului ABC ; **4 p**
- b) coordonatele punctului D , dacă $ABCD$ este dreptunghi; **4 p**
- c) aria dreptunghiului $ABCD$. **3 p**

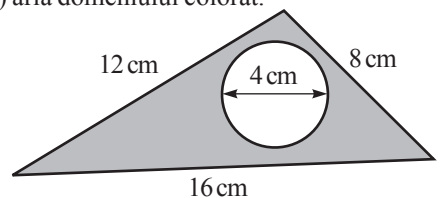
Varianta II

1. Completați:

- a) Aria dreptunghiului cu laturile de 5 cm și 7 cm este egală cu .
- b) Aria triunghiului dreptunghic avînd catetele de 14 cm și 4 cm este egală cu .
- c) Aria paralelogramului cu o latură de 12 cm și înălțimea corespunzătoare acestei laturi de 6 cm este egală cu .
- d) Aria rombului cu diagonalele de 11 cm și 8 cm este egală cu .

2. $ABCD$ este un dreptunghi.

- a) Determinați BF . **2 p**
- b) Aflați aria domeniului colorat. **2 p**
- c) Aflați aria triunghiului AED . **4 p**
3. Examinați desenul. Determinați:
- a) aria discului; **3 p**
- b) aria domeniului colorat. **4 p**



4. Fie punctele $A(-10, 4)$, $B(2, 10)$, $C(6, 2)$. Aflați: a) aria triunghiului ABC ; **4 p**
- b) coordonatele punctului D , dacă $ABCD$ este dreptunghi; **4 p**
- c) aria dreptunghiului $ABCD$. **3 p**

Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	34-33	32-30	29-26	25-22	21-18	17-14	13-10	9-6	5-3	2-1

§ 1. Poliedre

1 Examinați suprafața fiecărui obiect din figura 1.

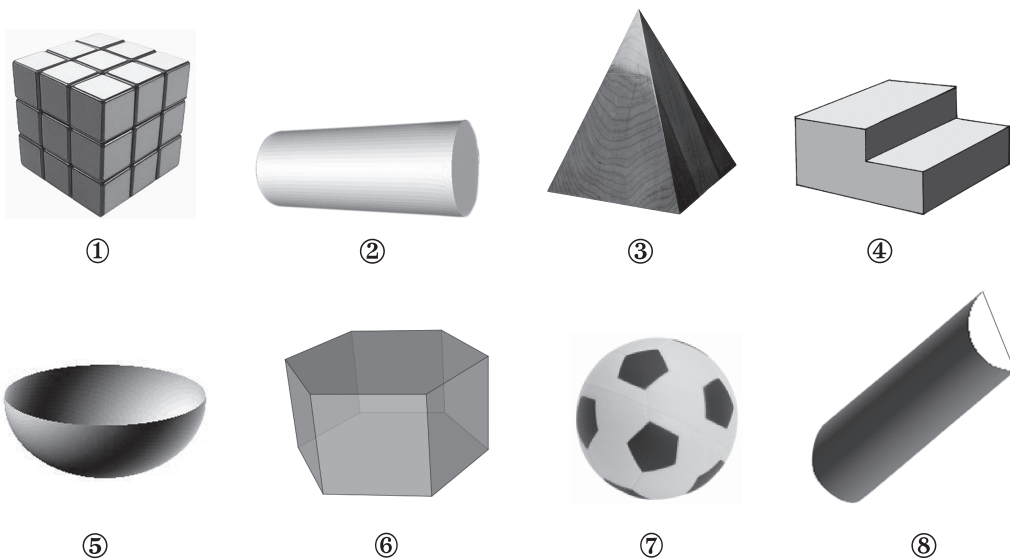


Fig. 1

- Selectați obiectele mărginite doar de suprafețe poligonale.
- Numiți corpurile geometrice studiate, ale căror modele reale se regăsesc în imaginile date.
- Care dintre corpurile geometrice studiate au fețe, muchii, vîrfuri?

Definiții

♦ **Poliedrul** este un corp geometric mărginit doar de suprafețe poligonale.

Suprafețele poligonale ale poliedrului se numesc **fețe**, laturile fețelor – **muchii**, iar vîrfurile muchiilor – **vîrfuri** ale poliedrului.

♦ Segmentul cu extremitățile-vîrfuri a două fețe diferite se numește **diagonală** a poliedrului.

Observație. Uneori vom numi fața poliedrului cu numele poligonului care mărginește această față.

APLICĂM

Fie cubul $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (fig. 2).
 $DD_1 C_1 C$ este o față, $[AA_1]$ – o muchie,
 D – un vîrf, iar $[B_1 D]$ – o diagonală a cubului.

- Numiți toate celelalte elemente ale cubului $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

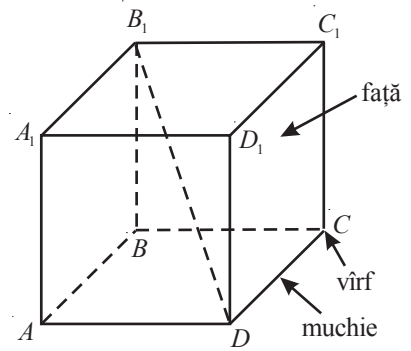


Fig. 2

2 Cum reprezentăm corect un cub?

- ① Construim un pătrat, apoi din centrul lui spre dreapta-sus construim un alt pătrat, congruent cu primul (fig. 3).
- ② Unim vîrfurile omoloage ale celor două pătrate.
- ③ „Înterupem” muchiile care nu se văd în spațiu.

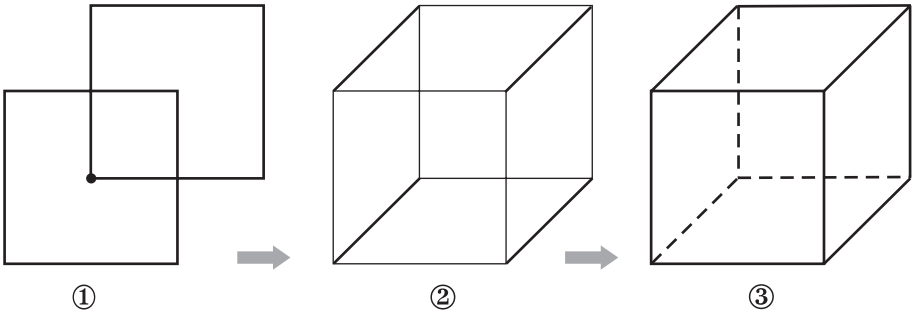


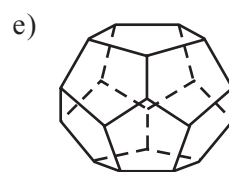
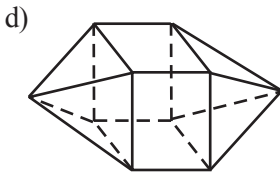
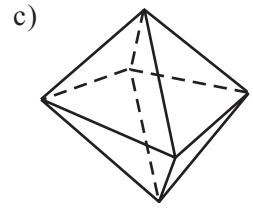
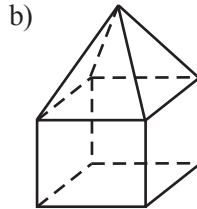
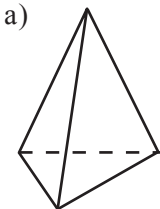
Fig. 3

- Amintiți-vă cum se calculează aria suprafeței și volumul cubului, apoi aflați aria suprafeței și volumul unui cub cu muchia de 6 cm.

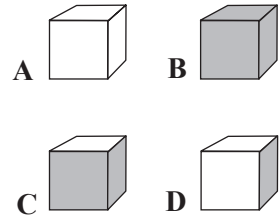
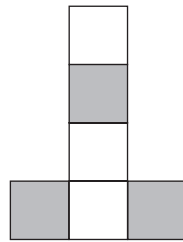
Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Examinați imaginile și aflați câte fețe are fiecare poliedru:



2. Cîte diagonale are fiecare poliedru din imaginile problemei 1?
 3. Care dintre cuburile date pot avea desfășurarea reprezentată?



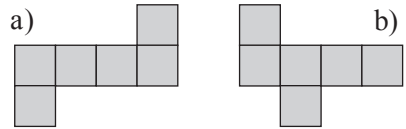
- Selectați varianta corectă de răspuns:
 a) A și B;
 b) C și D;
 c) A și D;
 d) B și D.

4. Determinați aria totală și volumul unui cub cu latura de 3 cm.
 5. Aflați volumul și aria totală a unui cub care are suma lungimilor muchiilor egală cu 48 cm.
 6. Determinați aria totală și volumul unui cub cu diagonala de $2\sqrt{3}$ cm.

Formăm capacitățile și aplicăm

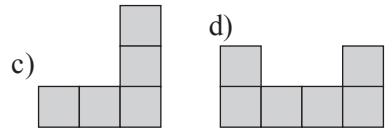
7. O canistră are forma unui cub cu muchia de 30 cm. Care este capacitatea canistrei, măsurată în litri?

8. Mihai dorește să facă o cutie de forma unui cub, dar fără capac, însă fundul cutiei să fie dublu. Care este desfășurarea potrivită?



Selectați varianta corectă de răspuns.

9. Volumul unui cub este de 125 cm^3 .
 Determinați aria totală a cubului.



10. Aflați volumul unui cub cu aria totală de 24 cm^2 .

11. Cît cîntărește un cub de gheață cu muchia de 20 cm, dacă 1 dm^3 de gheață cîntărește 0,9 kg?

12. Suma ariilor fețelor unui cub este egală cu 216 cm^2 . Aflați lungimea diagonalei cubului.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

13. Aflați aria totală a unui cub cu diagonala mai lungă cu 1 cm decît muchia lui.

14. Fie cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu $AB = 4 \text{ cm}$. Aflați:

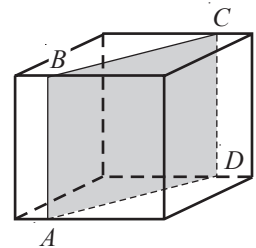
- a) distanța de la D' la B ; b) distanța de la D' la AB .

15. În cubul $ABCD A' B' C' D'$ punctul P este mijlocul lui $[C'D']$ și $AP = 8\sqrt{7}$ cm. Aflați aria totală și volumul cubului.

16. Un plan intersectează un cub în punctele A, B, C, D , care determină un dreptunghi.

Reprezentați similar cum trebuie un plan să intersecteze cubul pentru ca să determine:

- a) un triunghi echilateral;
 b) un hexagon regulat;
 c) un trapez isoscel.



17. Un cub este format din 27 de cuburi mai mici identice. Comparați aria totală a cubului mare cu aria corpului care se obține din cubul mare înlăturînd toate cuburile mici de la vîrfurile cubului mare.

§ 2. Prisma

1 Doru Visătoru visează să-și construiască o casă mare cu piscină. Fundul piscinei va avea forma unui dreptunghi cu dimensiunile de 10 m și 5 m. Care va fi capacitatea piscinei, dacă adâncimea ei va fi de 2 m?

Pentru a rezolva problema, vom studia *prismele* – o clasă specială de poliedre.

Studiați atent paragraful și spuneți ce corp geometric sugerează piscina lui Doru.



2.1. Elementele prisme. Clasificarea prismelor

Amintim că două *plane* se numesc *paralele* dacă ele nu au niciun punct comun.

Definiții

- ♦ **Prisma** este un poliedru format din două fețe congruente paralele, numite **baze**, și din toate segmentele cu extremitățile aparținând acestor baze. Celelalte fețe ale prisme se numesc **fețe laterale**. Laturile fețelor laterale se numesc **muchi laterale** ale prisme.
- ♦ Mulțimea punctelor prisme care nu aparțin bazelor și nici fețelor laterale se numește **interiorul prisme**.

De regulă, notînd prisma, scriem la început literele vîrfurilor bazei inferioare, apoi literele vîrfurilor bazei superioare.

Exemplu

Prisma din figura 4 poate fi notată $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$.

$A_1B_1C_1D_1E_1$ este o bază, EE_1D_1D – o față laterală, iar $[EE_1]$ – o muchie laterală a acestei prisme.

- Cîte muchii are prisma din figura 4? Dar diagonale?

Luînd în considerație definiția prisme, se poate demonstra

Teorema 1

Laturile omoloage ale bazelor prisme sînt paralele și congruente.

Astfel, în cazul prisme din figura 4, $AE \parallel A_1E_1$ și $[AE] \equiv [A_1E_1]$, $AB \parallel A_1B_1$ și $[AB] \equiv [A_1B_1]$ etc.

- Utilizînd teorema 1 și criteriile paralelogramului, demonstrați teoremele 2 și 3.

Teorema 2

Fețele laterale ale prisme sînt paralelograme.

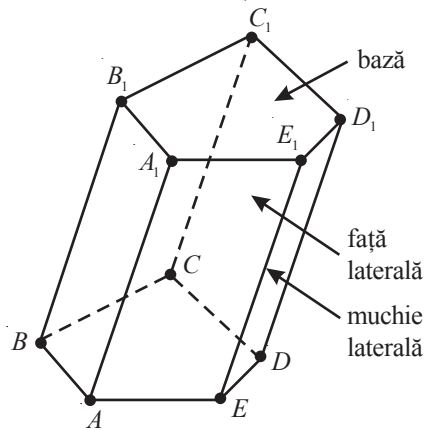


Fig. 4

Teorema 3

Muchiile laterale ale prisme sînt paralele și congruente.

Definiție

O dreaptă este perpendiculară pe un plan dacă ea este perpendiculară pe două drepte concurente ale acestui plan (fig. 5).

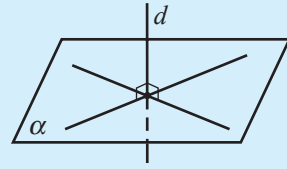


Fig. 5

Orice segment cu extremitățile în planele bazelor prisme, perpendicular pe ele, se numește **înălțime** a prisme. Lungimea acestui segment de asemenea se numește **înălțime**.

Dacă muchiile laterale ale prisme sînt perpendiculare pe planele bazelor, atunci prisma se numește **prismă dreaptă** (fig. 6 a)), în caz contrar – **prismă oblică** (fig. 6 b)). Observăm că fețele laterale ale prisme drepte sînt dreptunghiuri, iar muchiile ei laterale – înălțimi ale acesteia.

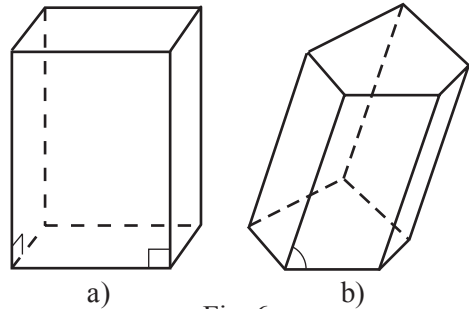


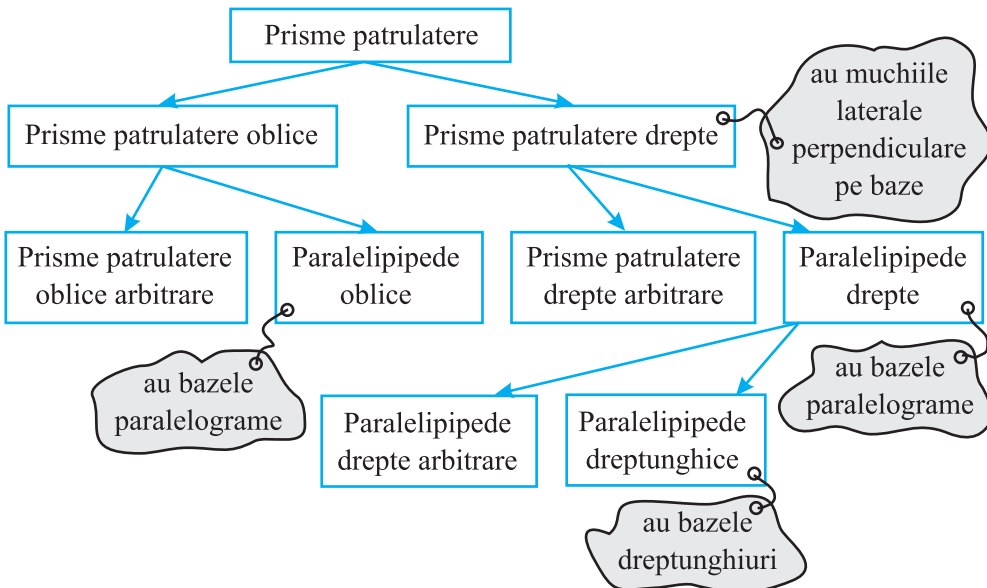
Fig. 6

Prisma dreaptă cu bazele poligoane regulate se numește **prismă regulată**.

Prismele se clasifică după poligoanele bazelor: *triunghiulare*, *patrulaterale*, *pentagonale*, *hexagonale* etc.

În figura 6 b) este reprezentată o prismă pentagonală oblică.

2 Examinați schema și observați cum se clasifică prismele patrulaterale.



• În care clasă de prisme patrulaterale se includ prismele patrulaterale regulate? Justificați.

APLICĂM

3 Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ cu $AA' = 10$ cm, $AD = 8$ cm, $DC = 6$ cm (fig. 7). Aflați $A_1 C$.

Rezolvare:

$AC^2 = AD^2 + DC^2$ (1), —————> deoarece $[AC]$ este diagonala dreptunghiului $ABCD$.

$A_1 C^2 = A_1 A^2 + AC^2$ (2), —————> deoarece $\Delta A_1 AC$ este dreptunghic în vârful A .

$A_1 C^2 = A_1 A^2 + AD^2 + DC^2$. —————> substituim (1) în (2).

Deci,

$A_1 A = \sqrt{10^2 + 8^2 + 6^2} = \sqrt{200} =$ —————> $\sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$.

$= 10\sqrt{2}$ (cm).

Răspuns: $10\sqrt{2}$ cm.

Teorema 4 (Teorema lui Pitagora în spațiu)

Pătratul diagonalei unui paralelipiped dreptunghic este egal cu suma pătratelor celor trei dimensiuni liniare ale acestuia:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \text{ (fig. 8).}$$

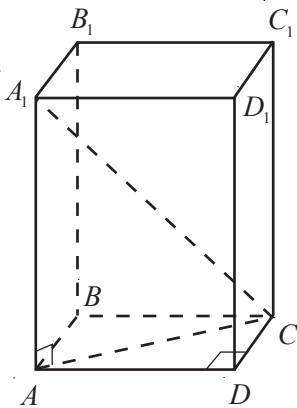


Fig. 7

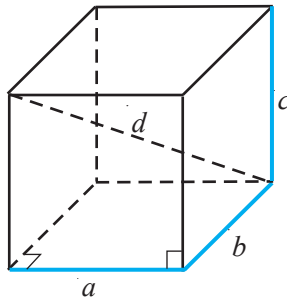


Fig. 8

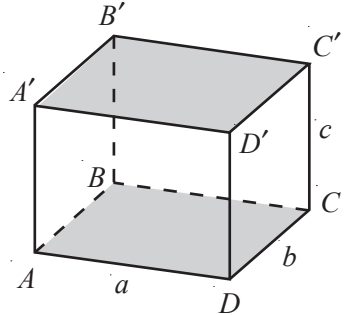


Fig. 9

2.2. Aria laterală, aria totală și volumul prisme

- 4 a) Reprezentați desfășurarea paralelipipedului dreptunghic din figura 9.
 b) Determinați aria suprafeței laterale și aria suprafeței totale a paralelipipedului.

Rezolvare:

- a) În figura 10 este reprezentată desfășurarea paralelipipedului $ABCD A' B' C' D'$.
 b) Fie \mathcal{A}_l aria suprafeței laterale, iar \mathcal{A}_t aria totală a paralelipipedului $ABCD A' B' C' D'$.

$$\mathcal{A}_l = \mathcal{A}_{AA'D'D} + \mathcal{A}_{DD'C'C} + \mathcal{A}_{CC'B'B} + \mathcal{A}_{BB'A'A} = ac + bc + ac + bc = 2ac + 2bc = 2c(a + b).$$

$$\mathcal{A}_l = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_{ABCD} + \mathcal{A}_{A'B'C'D'} = \mathcal{A}_1 + ab + ab = 2ac + 2bc + 2ab = 2(ac + bc + ab).$$

Reuniunea fețelor laterale ale prisme se numește **suprafață laterală** a prisme.

Aria suprafeței laterale a prisme se numește **arie laterală** a prisme și se notează cu \mathcal{A}_l .

Aria unei baze a prisme se notează cu \mathcal{A}_b .

Aria totală a prisme este suma dintre aria laterală și ariile bazelor ei și se notează \mathcal{A}_t .

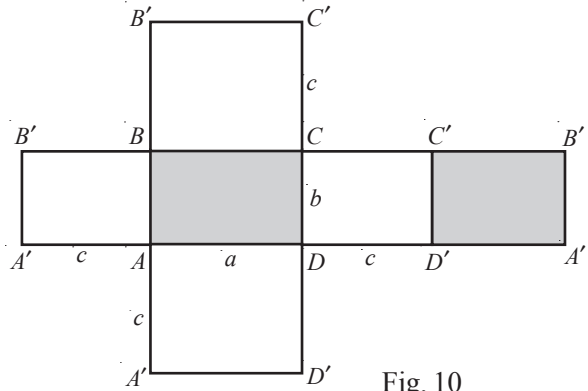


Fig. 10

Teorema 5

Aria totală a unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a, b, c este $\mathcal{A}_t = 2(ab + ac + bc)$ (fig. 8).



Atelier. Confeccionați din carton o prismă regulată hexagonală cu muchiile laterale de 9 cm și laturile bazei de 5 cm.

Teorema 6

Aria laterală a unei prisme drepte este egală cu produsul dintre perimetrul bazei și înălțimea prisme (sau lungimea muchiei laterale).

Să demonstrăm teorema 6.

Ipoteză:

Fie a_1, a_2, \dots, a_n laturile bazei unei prisme drepte, iar h – înălțimea prisme (fig. 11).

Concluzie:

$$\mathcal{A}_l = p \cdot h, \text{ unde } p = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Demonstrație:

- ① Fețele laterale ale unei prisme drepte sînt dreptunghiuri.
- ② $\mathcal{A}_l = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \dots + \mathcal{A}_n$, unde \mathcal{A}_i este aria feței cu dimensiunile a_i și $h, i \in \{1, 2, \dots, n\}$.
- ③ $\mathcal{A}_i = a_i \cdot h, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ (conform ① și ②).
- ④ Substituind ③ în ②, obținem:

$$\mathcal{A}_l = a_1 \cdot h + a_2 \cdot h + \dots + a_n \cdot h, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

$$\mathcal{A}_l = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot h = p \cdot h \text{ (c.c.t.d.)} \quad \blacktriangleright$$

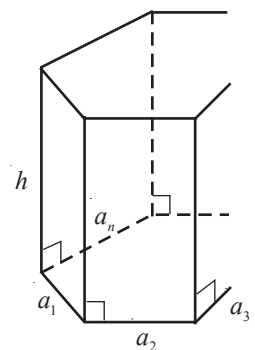


Fig. 11

- 5** Calculați volumul paralelipipedului dreptunghic cu dimensiunile $a = 4$ cm, $b = 3$ cm, $c = 5$ cm.

Rezolvare:

Baza paralelipipedului cuprinde $4 \cdot 3 = 12$ (pătrate), fiecare dintre ele cu aria de 1 cm^2 (fig. 12). Pe fiecare pătrat se poate așeza câte un cub cu muchia de 1 cm. Astfel, baza paralelipipedului va cuprinde 12 cuburi. Întrucât înălțimea acestui strat este de 1 cm, iar înălțimea paralelipipedului – de 5 cm, în paralelipiped încap 5 straturi. Prin urmare, volumul paralelipipedului dreptunghic este:

$$12 \cdot 5 = 60 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Răspuns: 60 cm^3 .

Generalizînd rezultatul problemei, obținem

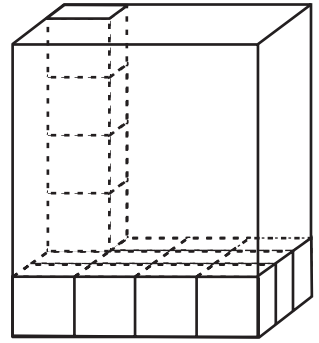


Fig. 12

Teorema 7

Volumul paralelipipedului dreptunghic este egal cu produsul celor trei dimensiuni liniare ale acestuia: $V = abc$ (fig. 13).

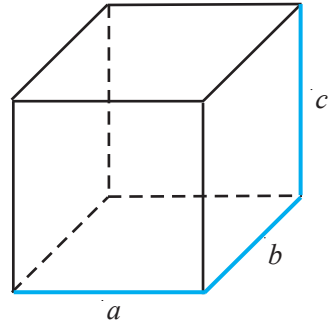


Fig. 13

Cum baza paralelipipedului dreptunghic este un dreptunghi, formula din teorema 7 poate fi rescrisă astfel:

$$V = \mathcal{A}_b \cdot c \quad (*),$$

unde $\mathcal{A}_b = a \cdot b$ este aria bazei paralelipipedului.

Mai mult chiar, se poate demonstra că formula (*) este adevărată pentru orice prismă.

Prin urmare, are loc

Teorema 8

Volumul prisme este egal cu produsul dintre aria bazei și înălțimea prisme.

APLICĂM

- 6** O prismă dreaptă are bazele paralelograme cu o latură de 6 cm și înălțimea dusă pe această latură de 4 cm. Înălțimea prisme este de 14 cm. Aflați volumul prisme.

Rezolvare:

Fie $ABCD A' B' C' D'$ prisma dată (fig. 14). Atunci

$$V_{pr.} = \mathcal{A}_{ABCD} \cdot h, \text{ unde } h \text{ este înălțimea prisme.}$$

$$\mathcal{A}_{ABCD} = BM \cdot AD = 6 \cdot 4 = 24 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$V_{pr.} = 24 \cdot 14 = 336 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Răspuns: 336 cm^3 .

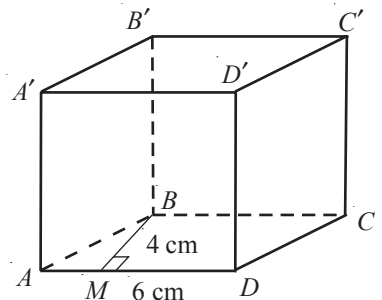


Fig. 14

7 Rezolvarea problemei **1** (de la începutul paragrafului):

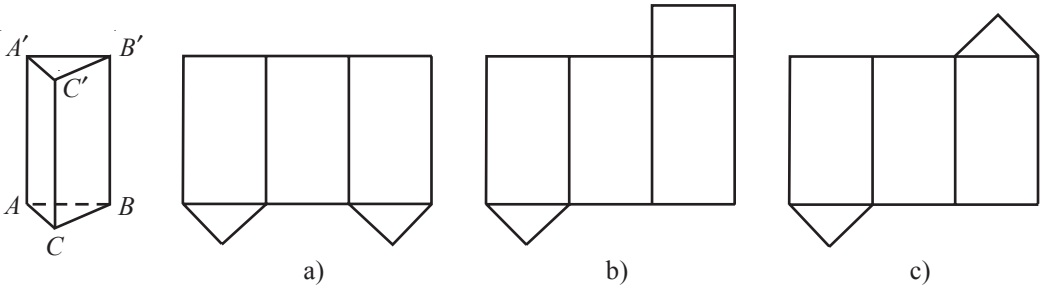
Capacitatea piscinei este egală cu volumul unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 5 m, 10 m și 2 m. Deci, $V = 5 \text{ m} \cdot 10 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 100 \text{ m}^3$.

Răspuns: 100 m^3 .

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Recunoașteți desfășurările corecte ale prisme triunghiulare.



2. Ilustrați desfășurarea unei prisme triunghiulare regulate drepte cu:

- a) latura bazei de 2 cm și înălțimea de 4 cm;
- b) latura bazei de 3 cm și înălțimea de 2 cm.

3. Copiați tabelul și completați cu *Da* doar dacă corpul geometric are proprietatea respectivă.

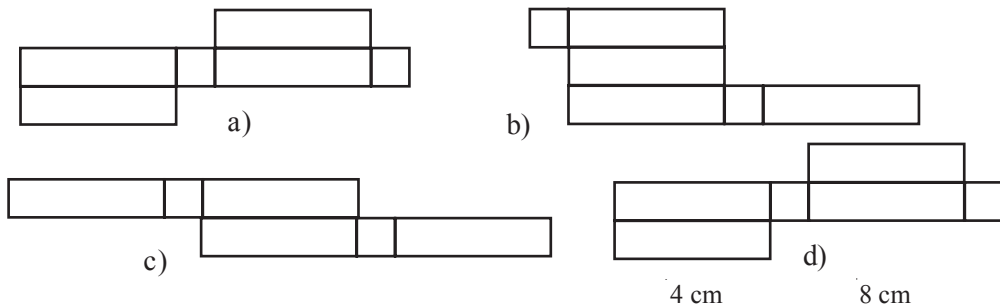
	Prisma patrulateră (arbitrară)	Prisma patrulateră dreaptă	Prisma patrulateră regulată	Paralelipiped (arbitrar)	Paralelipiped drept (arbitrar)	Paralelipiped dreptunghic	Cub
Are bazele patrulaterare	Da	Da	Da	Da	Da	Da	Da
Are muchiile laterale perpendiculare pe baze		Da			Da		
Are bazele paralelograme							
Are bazele dreptunghiuri							
Are fețele laterale paralelograme							
Are bazele pătrate							
Are fețele laterale pătrate							

- 4. Aflați aria totală și volumul unui paralelipiped dreptunghic cu laturile bazei de 6 cm, 7 cm și înălțimea de 5 cm.
- 5. Determinați aria laterală, aria totală și lungimea diagonalei unui paralelipiped dreptunghic cu o latură a bazei de 8 cm, aria bazei de 40 cm^2 și volumul de 240 cm^3 .

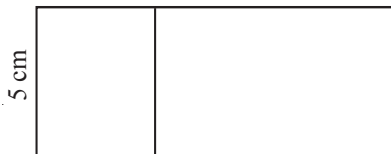
Formăm capacitățile și aplicăm

6. Aflați aria totală a unui paralelipiped dreptunghic cu o latură a bazei de 4 cm, aria bazei de 24 cm^2 și volumul egal cu 168 cm^3 .
7. Perimetrul bazei unui paralelipiped dreptunghic este de 40 cm, iar aria lui laterală – de 400 cm^2 . Determinați volumul paralelipipedului, știind că lungimea bazei este cu 4 cm mai mare decât lățimea ei.
8. Un paralelipiped dreptunghic cu laturile bazei de 3 cm și 5 cm are volumul de 90 cm^3 . Aflați aria laterală și aria totală a paralelipipedului.
9. Determinați aria laterală și volumul unei prisme triunghiulare regulate cu latura bazei de 6 cm și înălțimea de 7 cm.
10. Volumul unei prisme triunghiulare regulate este de 36 cm^3 . Aflați aria laterală și aria totală a prisme, dacă latura bazei este de 4 cm.
11. Toate muchiile unei prisme triunghiulare drepte au lungimea egală cu $2\sqrt{3}$ cm. Aflați volumul prisme.
12. O prismă triunghiulară regulată are aria bazei de $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Aflați aria totală și volumul prisme, dacă se știe că înălțimea prisme este de două ori mai mică decât lungimea laturii bazei.
13. Știind că latura bazei unei prisme triunghiulare regulate este de 3 cm și aria laterală de 45 cm^2 , aflați volumul acestei prisme.
14. Perimetrul bazei unei prisme triunghiulare regulate este de 15 cm. Determinați aria totală și volumul prisme, dacă înălțimea prisme este de 7 cm.
15. Diagonalele a 3 fețe diferite ale unui paralelipiped dreptunghic au lungimile egale respectiv cu 1 cm, 2 cm, 3 cm. Aflați lungimea diagonalei paralelipipedului.
16. Determinați aria laterală, aria totală și volumul unei prisme patrulater regulate cu latura bazei de 4 cm și înălțimea de 7 cm.
17. Determinați volumul unei prisme patrulater regulate cu aria bazei de 25 cm^2 și aria laterală de 160 cm^2 .
18. O prismă patrulateră regulată are latura bazei de 6 cm și volumul de 432 cm^3 . Determinați aria laterală și aria totală a prisme.
19. O bară metalică are forma unei prisme triunghiulare regulate cu lungimea laturii bazei de 10 cm și înălțimea de 1 m. Determinați masa barei, știind că densitatea metalului este de 7600 kg/m^3 .
20. Diagonala feței laterale a unei prisme patrulater regulate este de 13 cm. Știind că aria bazei este de 25 cm^2 , determinați volumul și aria totală a prisme.
21. Volumul unei prisme patrulater regulate este de 128 cm^3 , iar înălțimea ei – de 8 cm. Determinați aria laterală și aria totală a prisme.
22. Latura bazei unei prisme hexagonale regulate este de 3 cm, iar înălțimea prisme – de 5 cm. Aflați aria laterală, aria totală și volumul prisme.
23. Determinați aria totală a unei prisme hexagonale regulate cu aria bazei de $54\sqrt{3} \text{ cm}^2$ și volumul de 324 cm^3 .
24. Aflați volumul unei prisme hexagonale regulate cu înălțimea de 5 cm și aria laterală de 120 cm^2 .

25. Care din următoarele imagini nu poate fi desfășurarea unui paralelipiped dreptunghic?



26. În imagine sînt reprezentate doar două fețe din desfășurarea unui paralelipiped dreptunghic. Aflați volumul paralelipipedului.



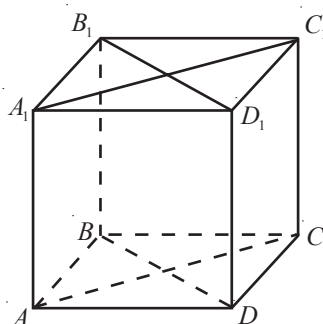
27. Diagonalele fețelor unui paralelipiped dreptunghic au lungimile de $\sqrt{41}$ cm, $4\sqrt{26}$ cm și respectiv $5\sqrt{17}$ cm. Aflați raportul dintre volumul paralelipipedului și lungimea diagonalei lui.

28. Perimetrul bazei unei prisme hexagonale regulate este de 18 cm, iar aria ei laterală – de $162\sqrt{3}$ cm². Calculați volumul acestei prisme.

29. Fie prisma $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (vezi desenul). Aflați aria ei laterală dacă $S_{AA_1 C_1 C} = 3$ cm², $S_{BB_1 D_1 D} = 4$ cm².

30. Aflați aria laterală și aria totală a unei prisme hexagonale regulate cu latura bazei de 2 cm și volumul de $60\sqrt{3}$ cm³.

31. Fețele unui paralelipiped dreptunghic au ariile respectiv egale cu 6 m², 6 m² și 4 m². Aflați volumul paralelipipedului.



Dezvoltăm capacitățile și creăm

32. Un bidon de forma unui paralelipiped dreptunghic, cu dimensiunile de 10 cm, 15 cm și 20 cm, este plin cu apă. El se goleşte într-un vas cubic cu muchia de 50 cm. Pînă la ce înălțime se ridică apa?

33. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile proporționale cu numerele 2, 3, 5 și volumul de 240 cm³. Aflați:

a) diagonala paralelipipedului;

b) aria totală a paralelipipedului.

34. O cutie are forma unui paralelipiped dreptunghic, notat $ABCD A' B' C' D'$. O furnică pornește din punctul A și merge pe suprafața laterală a cutiei pînă în punctul C' pe drumul cel mai scurt. Știind că $AB = 8$ cm, $BC = 4$ cm și $AA' = 12\sqrt{3}$ cm, aflați:

a) aria laterală, aria totală și volumul paralelipipedului;

b) lungimea drumului.

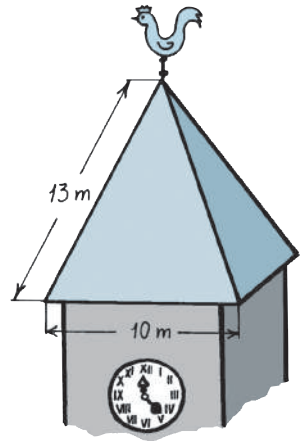
35. Fie $ABCA' B' C'$ o prismă triunghiulară regulată cu latura bazei $AB = 8$ cm și diagonala feței laterale de 10 cm. Calculați aria totală a prisme și volumul ei.

* Opțional

§ 3. Piramida

1 Acoperișul unui turn are forma unei piramide patrulatere cu bazele congruente de 10 m și muchiile laterale congruente de 13 m. Cîte cutii cu vopsea sînt necesare pentru acest acoperiș, dac a o cutie ajunge pentru o suprafață de 10 m²?

Pentru a rezolva problema, vom studia o altă clasă specială de poliedre, numite *piramide*.



3.1. Elementele piramidei. Clasificarea piramidelor

Definiție

Piramida este un poliedru format dintr-o suprafață poligonală, numită **baza piramidei**, un punct care nu aparține bazei, numit **vîrful piramidei**, și toate segmentele cu o extremitate în vîrful piramidei, iar cealaltă aparținînd bazei.

Segmentul cu o extremitate în vîrful piramidei, cealaltă aparținînd planului bazei și perpendicular pe această bază se numește **înălțime** a piramidei. Lungimea acestui segment de asemenea se numește **înălțime** a piramidei.

Fețele laterale ale piramidei sînt triunghiuri cu un vîrf în vîrful piramidei. Segmentele ce unesc vîrful piramidei cu vîrfurile bazei se numesc **muchii laterale** ale piramidei.

Mulțimea punctelor piramidei care nu aparțin bazei și nici fețelor laterale se numește **interiorul piramidei**.

De regulă, notînd piramida, scriem la început litera de la vîrful piramidei, apoi literele vîrfurilor bazei acesteia.

Exemplu

Piramida din figura 15 poate fi notată $SABCD$.

$ABCD$ este baza, S – vîrful, ABS – o față laterală, $[SB]$ – o muchie a acestei piramide.

Dacă $[SM]$ este perpendicular pe bază, atunci $[SM]$ este înălțimea piramidei $SABCD$.

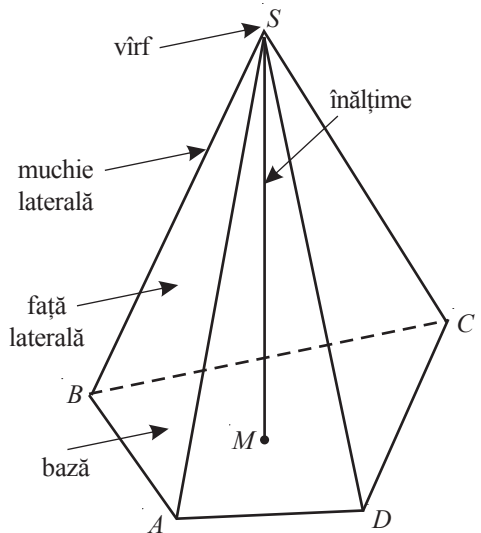


Fig. 15

Dacă piciorul înălțimii piramidei coincide cu centrul bazei (punctul egal depărtat de vîrfurile bazei), atunci piramida se numește **piramidă dreaptă**.

- Utilizînd teorema lui Pitagora, demonstrați

Teorema 9

Muchiile laterale ale unei piramide drepte sînt congruente.

Piramidele se clasifică după poligoanele bazei: *piramide triunghiulare (tetraedre), patrulatere, pentagonale, hexagonale, heptagonale etc.*

O piramidă dreaptă cu baza un poligon regulat se numește **piramidă regulată**.

Înălțimea unei fețe laterale trasată din vîrfurile piramidei regulate se numește **apotemă** a acestei piramide.

- În pofida faptului că piramidele triunghiulare se mai numesc **tetraedre**, termenul *tetraedru regulat* nu se utilizează în cazul oricărei piramide triunghiulare regulate.

Definiție

Un tetraedru cu toate muchiile congruente se numește **tetraedru regulat**.

- Formulați cîteva caracteristici sau proprietăți ale tetraedrului regulat.

Exemplu

Fețele tetraedrului regulat sînt triunghiuri echilaterale congruente.

2 Cum reprezentăm corect o piramidă?

- ① Construim cu rigla și creionul baza piramidei (fig. 16).
- ② Construim vîrfurile piramidei. În cazul piramidei regulate, găsim centrul bazei, apoi, pe verticala construită din acest punct, marcăm vîrfurile piramidei.
- ③ Unim vîrfurile piramidei cu vîrfurile bazei.
- ④ „Întreținem” muchiile care nu se văd în spațiu și ștergem liniile auxiliare.

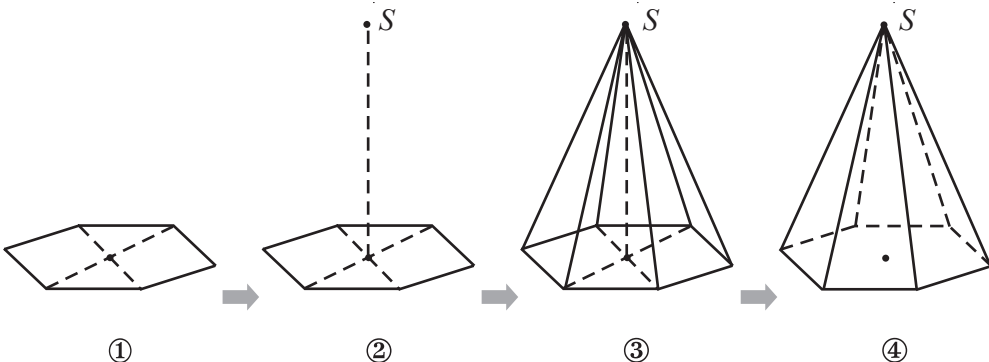


Fig. 16

3.2. Aria laterală, aria totală și volumul piramidei

- 3 a) În figura 17 este reprezentată piramida regulată $SABCD$. Construiți schematic desfășurarea ei.
 b) Determinați aria laterală a piramidei $SABCD$, dacă latura bazei este a , iar apotema piramidei este l .

Rezolvare:

- a) În figura 18 este reprezentată desfășurarea piramidei $SABCD$.

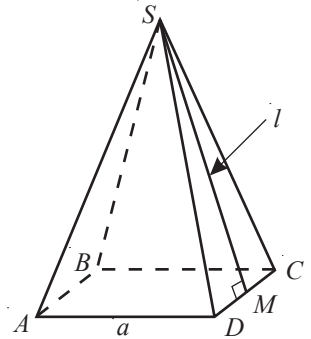


Fig. 17

Evident, triunghiurile AS_1B , BS_2C , CS_3D , DS_4A sînt triunghiuri isoscele și congruente între ele.

b) Aria laterală (\mathcal{A}_l) a piramidei este egală cu suma ariilor triunghiurilor isoscele din figura 18.

$$\mathcal{A}_{AS_1B} = \frac{1}{2} a \cdot l.$$

$$\text{Deci, } \mathcal{A}_l = 4 \cdot \frac{1}{2} al = 2al.$$

$$\text{Răspuns: } \mathcal{A}_l = 2al.$$

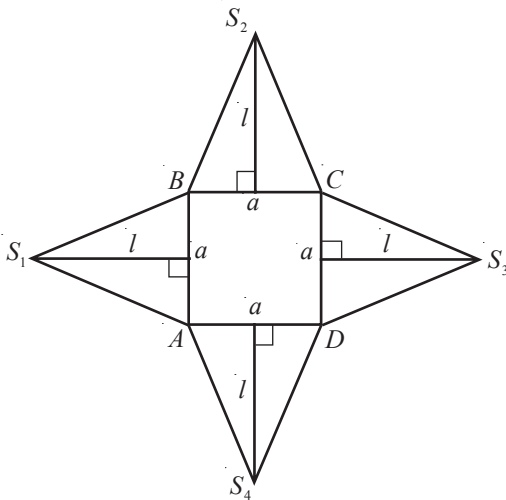


Fig. 18

Observație. Cum $p = 4a$ este egal cu perimetrul bazei piramidei, răspunsul problemei poate fi scris și astfel: $\mathcal{A}_l = \frac{1}{2} p \cdot l$, unde p este perimetrul bazei piramidei.

Reuniunea fețelor laterale ale piramidei se numește **suprafață laterală a piramidei**. Aria suprafeței laterale a piramidei se numește **arie laterală** a piramidei. **Aria totală** a piramidei este suma dintre aria laterală și aria bazei.

Teorema 10

Aria laterală a unei piramide regulate este egală cu semiprodusul dintre perimetrul bazei și apotema piramidei (fig. 19).

$$\mathcal{A}_l = \frac{1}{2} p \cdot l,$$

unde p este perimetrul bazei.

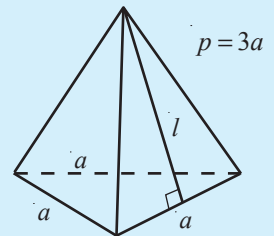


Fig. 19

APLICĂM

• Rezolvarea problemei **1**:

Pentru a afla suprafața acoperișului, trebuie să calculăm aria laterală a unei piramide patrulatere regulate $SABCD$ cu latura bazei de 10 m și muchia laterală de 13 m (fig. 20).

Fie $[SM]$ apotema piramidei.

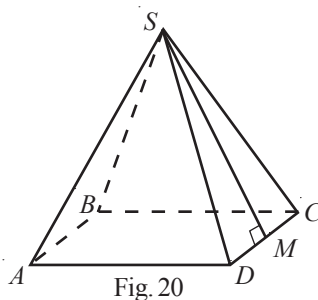


Fig. 20

$SM = \sqrt{SD^2 - DM^2}$, —————> deoarece ΔSMD este dreptunghic în M .

$SM = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (m).

$A_l = \frac{1}{2} p \cdot SM$, —————> p este perimetrul bazei.

$A_l = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 12 = 240$ (m²). —————> perimetrul bazei este egal cu 40 m.

$240 : 10 = 24$ (cutii).

Răspuns: 24 de cutii cu vopsea.

4 Care este volumul piramidei examinate în problema **1**?

Pentru a afla răspunsul, vom examina mai întâi următoarea teoremă.

Teorema 11

Volumul piramidei este egal cu o treime din produsul dintre aria bazei și înălțimea piramidei.

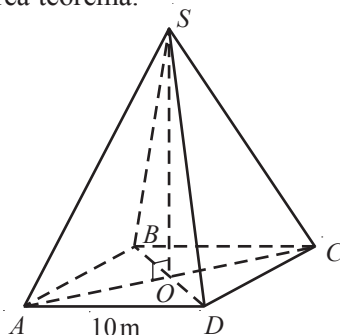


Fig. 23

APLICĂM

• Rezolvarea problemei **4**:

Aflăm volumul piramidei patrulatere regulate $SABCD$ (fig. 23) cu latura bazei de 10 m și muchia de 13 m.

① Fie O punctul de intersecție a diagonalelor bazei $ABCD$. Atunci $[SO]$ este înălțimea piramidei $SABCD$ —————> deoarece $SABCD$ este o piramidă regulată.

② $AO = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ (m) —————> deoarece diagonala pătratului cu latura a este egală cu $a\sqrt{2}$.

③ $SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{169 - 50} = \sqrt{119}$ (m) —————> deoarece $[SO]$ este o catetă a triunghiului dreptunghic SOA .

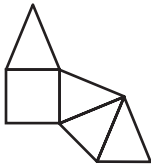
④ $V_{pir} = \frac{1}{3} A_b \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot \sqrt{119} = \frac{100\sqrt{119}}{3}$ (m³) —————> conform teoremei 11.

Răspuns: $\frac{100\sqrt{119}}{3}$ m³.

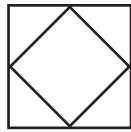
Exerciții și probleme

■ Fixăm cunoștințele

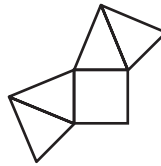
1. Aria bazei unei piramide triunghiulare regulate este egală cu $9\sqrt{3}$ cm², iar apotema piramidei – cu 5 cm. Aflați aria laterală a piramidei.
2. Perimetrul bazei unei piramide triunghiulare regulate este de $18\sqrt{3}$ cm, înălțimea – de 4 cm, iar apotema piramidei – de 5 cm. Determinați aria laterală, aria totală și volumul piramidei.
3. Volumul unei piramide triunghiulare regulate este de $3\sqrt{3}$ cm³, înălțimea ei – de 1 cm, iar apotema piramidei – de 2 cm. Aflați aria laterală a piramidei.
4. Aria bazei unei piramide triunghiulare regulate este de $36\sqrt{3}$ cm², apotema ei – de 4 cm, iar înălțimea piramidei – de 2 cm. Determinați aria totală și volumul piramidei.
5. Calculați aria totală a unei piramide triunghiulare regulate cu apotema de 4 cm și aria bazei de $27\sqrt{3}$ cm².
6. Care dintre următoarele figuri nu reprezintă desfășurarea unei piramide?



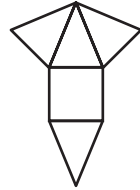
a)



b)



c)



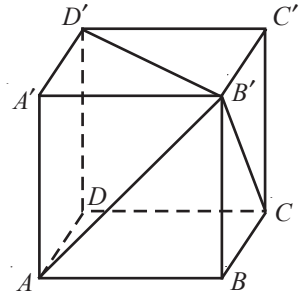
d)

7. Apotema unei piramide patrulateră regulate este de 3 cm, înălțimea ei – de $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm, iar aria laterală – de 18 cm. Aflați volumul piramidei.
8. Determinați aria laterală și volumul unei piramide patrulateră regulate cu latura bazei de 6 cm, apotema de 5 cm și înălțimea de 4 cm.
9. Înălțimea unei piramide patrulateră regulate este de 12 cm, perimetrul bazei piramidei – de 40 cm, iar apotema ei – de 13 cm. Aflați aria totală și volumul piramidei.
10. Aflați aria totală și volumul unei piramide patrulateră regulate cu aria bazei de 36 cm², apotema de 6 cm și înălțimea de $3\sqrt{3}$ cm.
11. Latura bazei unei piramide patrulateră regulate este de 8 cm, apotema ei – de 5 cm, iar înălțimea – de 3 cm. Determinați aria laterală, aria totală și volumul piramidei.
12. Aflați aria totală și volumul unei piramide hexagonale regulate cu latura bazei de 4 cm, înălțimea de 2 cm și apotema de 4 cm.

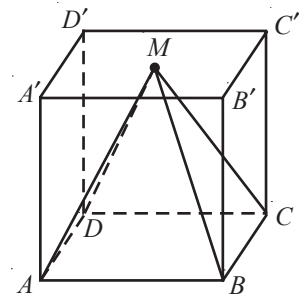
■ Formăm capacitățile și aplicăm

13. Fie o piramidă patrulateră regulată cu latura bazei a , apotema l , perimetrul bazei \mathcal{P} , aria laterală \mathcal{A}_l și aria totală \mathcal{A} . Aflați:
 - a) \mathcal{P} , \mathcal{A}_l și \mathcal{A} , dacă $a = 6$ m, $l = 12$ m;
 - b) l , \mathcal{P} și \mathcal{A}_l , dacă $a = 13$ m, $\mathcal{A} = 689$ m²;
 - c) a , \mathcal{P} , \mathcal{A} , dacă $l = 16$ m, $\mathcal{A}_l = 288$ m²;
 - d) a , l , \mathcal{A} , dacă $\mathcal{P} = 44$ m, $\mathcal{A}_l = 396$ m²;
 - e) a , k , \mathcal{P} , dacă $\mathcal{A}_l = 352$ m², $\mathcal{A} = 416$ m².

14. Aria bazei unei piramide hexagonale regulate este egală cu $48\sqrt{3}$ cm², iar apotema piramidei – cu 5 cm. Aflați aria laterală a piramidei.
15. Piramida lui Kheops a avut inițial înălțimea de 147,5 m și latura pătratului bazei de 232 m. Raportul dintre lungimea apotemei VM și segmentul OM , unde V este vârful piramidei, iar O – centrul bazei, este un număr renumit, utilizat în arhitectură încă din Antichitate. Aflați acest raport și comparați-l cu $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.



16. Lungimea muchiei cubului din imagine este de $4\sqrt{3}$ cm. Determinați înălțimea tetraedrului $AA'D'B'$ ($A'D'B'$ este baza tetraedrului).
17. Volumul unei piramide hexagonale regulate este egal cu $48\sqrt{3}$ cm³, înălțimea piramidei – cu 3 cm, iar apotema este congruentă cu latura bazei. Determinați aria totală a piramidei.
18. Aria laterală a unei piramide hexagonale regulate este egală cu 192 cm², înălțimea ei – cu 4 cm, iar apotema piramidei este congruentă cu latura bazei. Determinați volumul piramidei.
19. Lungimea muchiei cubului din imagine este de 16 cm. Vârful M al piramidei $MABCD$ este centrul feței $A'B'C'D'$ a cubului. Aflați raportul dintre aria laterală și aria bazei piramidei.
20. Latura bazei unei piramide hexagonale regulate este congruentă cu înălțimea piramidei. Determinați aria laterală și volumul piramidei, dacă înălțimea piramidei este de 10 cm, iar apotema ei – de $5\sqrt{7}$ cm.

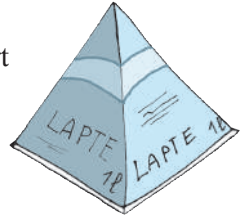


■ ■ ■ Dezvoltăm capacitățile și creăm

21. Înălțimea unei piramide patrulatere regulate este de 8 cm, iar lungimea laturii bazei – de 12 cm. Aflați aria totală și volumul piramidei.
22. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat, $AB = 4$ cm și G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor DBC, DAC și respectiv DAB .
- a) Aflați aria totală și volumul tetraedrului.
- b) Aflați raportul dintre aria triunghiului $G_1G_2G_3$ și aria triunghiului ABC .
23. Înălțimea unui tetraedru regulat este de 8 cm. Aflați volumul tetraedrului.

§ 4. Trunchiul de piramidă

- 1** Un pachet piramidal, plin cu lapte și așezat pe masă, a fost spart cu un cuțit la nivelul jumătății din înălțimea pachetului. Cât lapte va rămîne în pachet, dacă el are capacitatea de $1l$?



Rezolvare:

Considerăm că pachetul are forma unei piramide triunghiulare $SABC$ (fig. 24).

Rezolvarea problemei se poate face prin două metode.

Metoda I. Aflăm volumul corpului care se obține din piramida $SABC$ după înlăturarea piramidei $SA_1B_1C_1$ cu baza $A_1B_1C_1$ paralelă bazei ABC și care intersectează înălțimea SO în mijlocul ei – punctul O_1 .

Metoda II. Aflăm mai întâi cu cât s-a micșorat capacitatea pachetului, adică volumul piramidei $SA_1B_1C_1$.

Volumul piramidei $SABC$ se calculează după formula $V = \frac{1}{3} \mathcal{A}_B \cdot h$, unde \mathcal{A}_B este aria bazei ABC , iar h este înălțimea acestei piramide.

Volumul piramidei $SA_1B_1C_1$ este $V_1 = \frac{1}{3} \mathcal{A}_b \cdot h_1$, unde \mathcal{A}_b este aria bazei $A_1B_1C_1$, iar $h_1 = \frac{h}{2}$.

Utilizînd asemănarea triunghiurilor, se poate arăta că $\mathcal{A}_b = \frac{1}{4} \mathcal{A}_B$.

Prin urmare, $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \mathcal{A}_B \cdot \frac{h}{2} = \frac{\mathcal{A}_B h}{24} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} \mathcal{A}_B h = \frac{1}{8} V$.

Deci, volumul corpului $ABCA_1B_1C_1$ este $V - V_1 = V - \frac{1}{8} V = \frac{7}{8} V$.

Prin urmare, în cutie vor rămîne $\frac{7}{8} l$ de lapte.

Răspuns: $\frac{7}{8} l$.

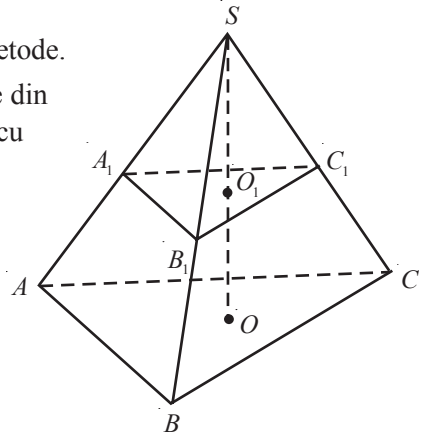


Fig. 24

Observație. Mai târziu vom rezolva această problemă și prin **Metoda I**. Pentru aceasta vom studia un alt tip de poliedre – **trunchiurile de piramidă**.

4.1. Elementele trunchiului de piramidă

Un plan care este paralel cu planul bazei piramidei și intersectează piramida, o împarte în două poliedre – un **trunchi de piramidă** și o piramidă mai mică.

Fețele paralele ale trunchiului de piramidă se numesc **baze**.

Orice segment cu extremitățile aparținînd bazelor trunchiului de piramidă și perpendicular pe ele se numește **înălțime** a trunchiului de piramidă. Lungimea acestui segment de asemenea se numește **înălțime**.

Bazele trunchiului de piramidă sînt poligoane asemenea. Fețele laterale sînt trapeze. De regulă, notînd trunchiul de piramidă, scriem la început literele bazei mari, apoi literele bazei mici.

Exemplu

Trunchiul de piramidă din figura 25 poate fi notat $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$. Poligoanele $ABCDE$ și $A_1B_1C_1D_1E_1$ sînt respectiv baza mare și baza mică, AA_1E_1E – o față laterală, iar $[MM_1]$ – o apotemă a acestui trunchi de piramidă.

Dacă $[OO_1]$ este perpendicular pe baze, atunci $[OO_1]$ este o înălțime a trunchiului de piramidă.

Segmentul cu extremitățile în centrele bazelor unui **trunchi de piramidă dreaptă** este înălțimea acestui trunchi.

Trunchiul de piramidă regulată este un trunchi de piramidă dreaptă cu bazele poligoane regulate. Fețele ei laterale sînt trapeze congruente.

Înălțimile fețelor laterale ale unui trunchi de piramidă regulată se numesc **apotemele** trunchiului de piramidă.

Trunchiurile de piramidă se clasifică după poligoanele bazelor: *trunchiuri de piramide triunghiulare, patrulatere, pentagonale, hexagonale, heptagonale etc.*

Trunchiul de piramidă este desfășurabil.

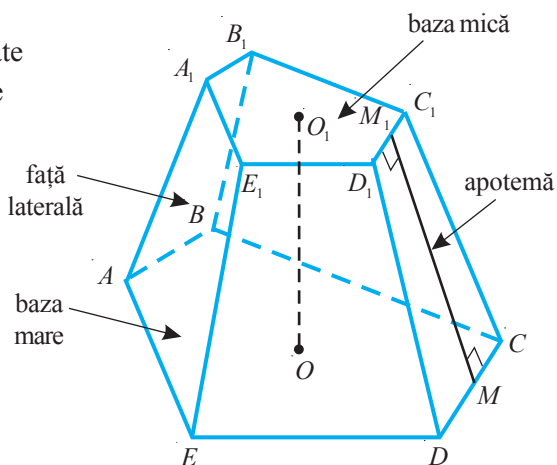


Fig. 25

2 Cum reprezentăm corect un trunchi de piramidă?

- ① Construim cu rigla și creionul o piramidă (fig. 26; vezi § 3).
- ② Marcăm pe o muchie laterală un punct și din acel punct construim un poligon cu laturile respectiv paralele cu laturile bazelor piramidei.
- ③ Cu guma ștergem muchiile laterale ale piramidei mai mici.

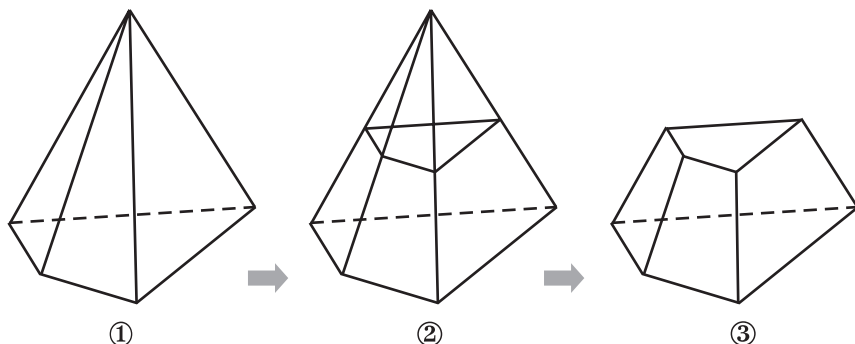


Fig. 26

3 (opțional). Determinați volumul unui trunchi de piramidă, fiind date ariile \mathcal{A}_B și \mathcal{A}_b ale bazelor și înălțimea h a trunchiului.

Rezolvare:

Fie x înălțimea piramidei de la care provine trunchiul (fig. 27).

Volumul \mathcal{V} al trunchiului de piramidă este egal cu diferența volumelor a două piramide: una cu aria bazei \mathcal{A}_B și înălțimea x , alta – cu aria bazei \mathcal{A}_b și înălțimea $x - h$.

Din asemănarea acestor piramide rezultă că

$$\frac{\mathcal{A}_b}{\mathcal{A}_B} = \left(\frac{x-h}{x}\right)^2. \text{ De aici } x = \frac{h\sqrt{\mathcal{A}_B}}{\sqrt{\mathcal{A}_B} - \sqrt{\mathcal{A}_b}}.$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_B x - \frac{1}{3}\mathcal{A}_b(x-h) = \frac{1}{3}\left[\mathcal{A}_B \cdot \frac{h\sqrt{\mathcal{A}_B}}{\sqrt{\mathcal{A}_B} - \sqrt{\mathcal{A}_b}} - \mathcal{A}_b\left(\frac{h\sqrt{\mathcal{A}_B}}{\sqrt{\mathcal{A}_B} - \sqrt{\mathcal{A}_b}} - h\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}h\left(\mathcal{A}_B \frac{\sqrt{\mathcal{A}_B}}{\sqrt{\mathcal{A}_B} - \sqrt{\mathcal{A}_b}} - \mathcal{A}_b \frac{\sqrt{\mathcal{A}_B}}{\sqrt{\mathcal{A}_B} - \sqrt{\mathcal{A}_b}} + \mathcal{A}_b\right) =$$

$$= \frac{1}{3}h\left[(\mathcal{A}_B - \mathcal{A}_b) \frac{\sqrt{\mathcal{A}_B}}{\sqrt{\mathcal{A}_B} - \sqrt{\mathcal{A}_b}} + \mathcal{A}_b\right] =$$

$$= \frac{1}{3}h[(\sqrt{\mathcal{A}_B} + \sqrt{\mathcal{A}_b}) \cdot \sqrt{\mathcal{A}_B} + \mathcal{A}_b] = \frac{1}{3}h(\mathcal{A}_B + \sqrt{\mathcal{A}_B \mathcal{A}_b} + \mathcal{A}_b).$$

Răspuns: $\frac{1}{3}h(\mathcal{A}_B + \sqrt{\mathcal{A}_B \mathcal{A}_b} + \mathcal{A}_b).$

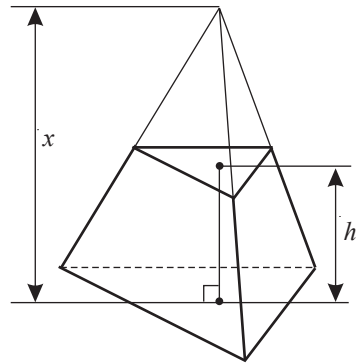


Fig. 27

APLICĂM

• *Rezolvarea prin metoda I a problemei 1* (de la începutul paragrafului):

Fie \mathcal{V} volumul trunchiului, H înălțimea piramidei. Atunci

$$\mathcal{A}_b = \frac{1}{4}\mathcal{A}_B, \quad h = \frac{H}{2} \quad (*).$$

Substituind (*) în formula-răspunsul problemei 3, obținem

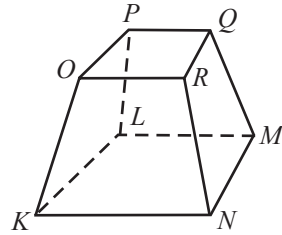
$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \cdot \frac{H}{2} \left(\mathcal{A}_B + \sqrt{\mathcal{A}_B \cdot \frac{1}{4}\mathcal{A}_B} + \frac{1}{4}\mathcal{A}_B \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{H}{2} \left(\mathcal{A}_B + \frac{1}{2}\mathcal{A}_B + \frac{1}{4}\mathcal{A}_B \right) = \frac{1}{3} \cdot H \cdot \frac{7}{8}\mathcal{A}_B = \frac{7}{8}\mathcal{V}_p,$$

unde \mathcal{V}_p este volumul piramidei. Prin urmare, în pachet vor rămâne $\frac{7}{8}l$ de lapte.

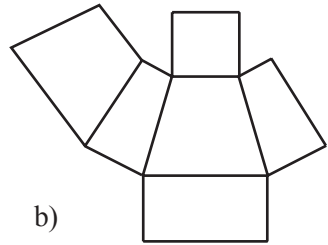
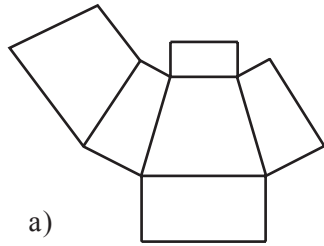
Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Reprezentați un trunchi de piramidă:
 - a) triunghiulară;
 - b) patrulateră;
 - c) pentagonală.
2. În figură este reprezentat un trunchi de piramidă. Identificați:
 - a) bazele;
 - b) fețele laterale;
 - c) muchiile laterale.



3. Luând în considerație proprietățile ce țin de bazele și fețele laterale ale unui trunchi de piramidă, stabiliți care dintre următoarele reprezentări poate fi desfășurarea unui trunchi de piramidă patrulateră.



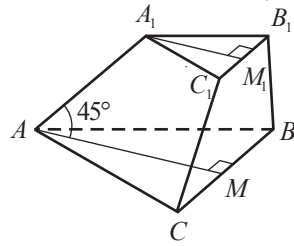
4. Ilustrați desfășurarea unui trunchi de piramidă:
 - a) triunghiulară regulată;
 - b) patrulateră cu bazele paralelograme;
 - c) patrulateră cu bazele trapeze.
5. Un poliedru are (numai) două fețe paralele, celelalte fiind trapeze. Decideți dacă poliedrul este trunchi de piramidă, știind că cele două fețe paralele sînt:

a) triunghiuri asemenea;	b) triunghiuri echilaterale;
c) pătrate;	d) poligoane regulate cu același număr de laturi.

Formăm capacitățile și aplicăm

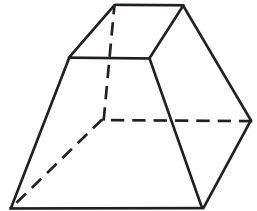
6. Lungimea muchiei laterale a unui trunchi de piramidă patrulateră este de 26 cm. Aflați înălțimea trunchiului, dacă lungimile diagonalelor bazelor triunghiului sînt de 30 cm și 10 cm.
7. Aflați lungimea muchiei laterale a unui trunchi de piramidă patrulateră regulată cu laturile bazelor de 10 cm și 4 cm și apotema trunchiului de 4 cm.
8. Lungimea muchiei laterale a unui trunchi de piramidă patrulateră regulată este de 9 cm. Determinați înălțimea trunchiului, dacă laturile bazelor sînt de 10 cm și 2 cm.
9. Înălțimea unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată este de 10 cm. Aflați lungimea muchiei laterale, dacă laturile bazelor sînt de 40 cm și 10 cm.
10. Determinați înălțimea unui trunchi de piramidă patrulateră regulată cu latura bazei mari de 25 cm, muchia laterală de 26 cm și apotema trunchiului de 24 cm.
11. Aflați înălțimea unui trunchi de piramidă patrulateră regulată cu laturile bazelor de 10 cm și 6 cm și diagonala trunchiului de 12 cm.

12. Muchia laterală a unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată formează cu o înălțime a bazei mari un unghi de 45° (vezi desenul). Aflați aria figurii AA_1M_1M , dacă laturile bazelor trunchiului sînt de 10 cm și 6 cm.



■ ■ ■ Dezvoltăm capacitățile și creăm

13. Muchia laterală a unui trunchi de piramidă patrulateră regulată formează cu o diagonală a bazei mari un unghi de 45° . Aflați lungimea diagonalei trunchiului de piramidă, dacă laturile bazelor sînt de 24 cm și 7 cm.
14. Aflați înălțimea unui trunchi de piramidă patrulateră regulată cu laturile bazelor de 8 cm și 2 cm și aria patrulaterului cu vîrfurile-extremități ale diagonalelor paralele ale bazelor trunchiului egală cu $20\sqrt{2}$ cm².
15. Examinați desenul. Cu ajutorul riglei negradate stabiliți dacă trunchiul de piramidă este reprezentat corect.
- 16*. Calculați înălțimea unui trunchi de piramidă hexagonală regulată cu latura bazei mici de 4 cm, latura bazei mari de 12 cm și volumul de 936 cm³.
- 17*. Demonstrați că aria suprafeței laterale a unui trunchi de piramidă regulată este egală cu produsul dintre semisuma perimetrelor bazelor și apotema trunchiului.



Exerciții și probleme recapitulative

■ Fixăm cunoștințele

- Aflați suma măsurilor unghiurilor formate de fețele unei:
 - piramide triunghiulare;
 - prisme patrulatere;
 - prisme pentagonale.
- Determinați înălțimea unui tetraedru regulat cu muchia de 10 cm.
- Aflați volumul unui tetraedru regulat cu muchia de 8 cm.
- Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sînt de 7 cm, 4 cm, 8 cm. Determinați aria totală și volumul paralelipipedului.
- Volumul unui cub este de 216 cm³. Aflați aria totală a cubului.
- O prismă triunghiulară regulată are muchia bazei de 4 cm și înălțimea de 8 cm. Determinați aria laterală și volumul ei.
- O prismă hexagonală regulată are muchia bazei de 2 cm, iar fețele laterale sînt pătrate. Aflați aria laterală și volumul prisme.
- Fie $ABCDEF$ o prismă dreaptă cu baza ABC triunghi dreptunghic. Înălțimea prisme este congruentă cu ipotenuza AC a bazei și $AB = 12$ cm, $BC = 9$ cm. Determinați:
 - aria totală și volumul prisme;
 - aria triunghiului EBM , unde M este mijlocul muchiei AC .

* Opțional

9. Cîte diagonale are un trunchi de piramidă:
 a) pentagonală; b) ale cărei baze sînt poligoane cu n laturi?
10. Fie $ABC'A'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată. Știind că distanța dintre centrele a două fețe laterale este de 4 cm și aria laterală – de $96\sqrt{3}$ cm², aflați:
 a) înălțimea prisme; b) volumul prisme.
11. Toate muchiile prisme regulate $ABC'A'B'C'$ sînt de 3 cm. Determinați lungimea segmentului AD , unde D este mijlocul muchiei $B'C'$.
12. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile bazei de 15 cm și 5 cm, iar aria lui laterală este de două ori mai mare decît aria bazei. Aflați înălțimea și volumul paralelipipedului.
13. Fie un cub cu diagonala de 3 cm. Unind centrul cubului cu vîrfurile lui, se obțin 6 piramide congruente. Ce volum are fiecare dintre aceste piramide?
14. Fie $ABC'A'B'C'$ o prismă triunghiulară. Triunghiul ABC are două laturi de 17 cm și 24 cm, iar măsura unghiului format de ele este de 30° . Știind că înălțimea prisme este de 12 cm, aflați volumul ei.

Formăm capacitățile și aplicăm

15. Suma dimensiunilor unui paralelipiped dreptunghic este egală cu 24 cm, lungimea diagonalei – cu 18 cm. Determinați aria totală a paralelipipedului.
16. Fie cubul $ABCD'A'B'C'D'$, M – mijlocul lui $[A'D']$, iar P – mijlocul lui $[AB]$. Știind că $MP = 4\sqrt{3}$ cm, aflați lungimea muchiei și volumul cubului.
17. Suma muchiilor concurente într-un singur vîrf al unui paralelipiped dreptunghic este de 15 cm, iar diagonala lui – de $\sqrt{77}$ cm. Determinați aria totală a paralelipipedului.
18. Volumul unei prisme patrulateră regulate este de 175 cm³, iar înălțimea ei – de 7 cm. Determinați lungimea diagonalei și aria totală a prisme.
19. O prismă hexagonală regulată are muchia bazei de 6 cm și înălțimea de 8 cm. Determinați lungimea diagonalelor prisme, aria totală și volumul ei.
20. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCD'A'B'C'D'$ cu $AB = 12$ cm, $BC = 35$ cm. Aria secțiunii determinate de muchiile AA' și CC' este egală cu 370 cm². Determinați aria laterală și volumul paralelipipedului.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

21. O suprafață de forma unui triunghi echilateral cu înălțimea de $4\sqrt{3}$ cm reprezintă desfășurarea unui tetraedru. Determinați aria totală și volumul tetraedrului.
22. Fie piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu baza ABC și $AB = 12\sqrt{2}$ cm, $AV = 12$ cm.
 a) Aflați înălțimea triunghiului ABC . b) Determinați înălțimea piramidei.
 c) Aflați volumul piramidei.
23. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată provine dintr-o piramidă cu înălțimea de 12 cm și latura bazei de 8 cm. Determinați lungimea muchiei laterale a trunchiului, știind că el are înălțimea de 4 cm.
24. Aria totală a unui tetraedru regulat este egală cu $6\sqrt{3}$ cm². Aflați volumul tetraedrului.

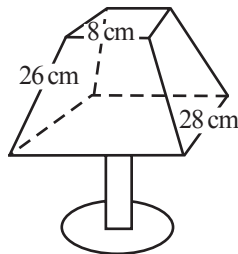
Test sumativ

Timp efectiv de lucru:
45 de minute



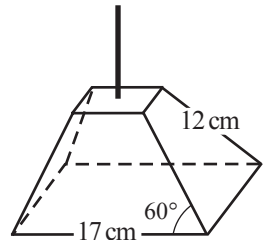
Varianta I

- Un vas de forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile bazei de 10 cm și 15 cm și înălțimea de 20 cm este plin cu apă.
 - Reprezentați desfășurarea paralelipipedului la scara 1: 5. **3 p**
 - Aflați aria laterală a paralelipipedului. **3 p**
 - Câți litri de apă sînt în vas? **3 p**
 - Apa din vas se toarnă într-un vas cubic cu muchia de 20 cm. La ce înălțime s-a ridicat apa în vasul cubic? **3 p**
 - Aflați raportul dintre capacitatea vasului cubic și a celui paralelipedic. **3 p**
- Un corp metallic are forma unui tetraedru regulat.
 - Aflați lungimea unei muchii a tetraedrului, dacă suma lungimilor tuturor muchiilor este egală cu 54 cm. **2 p**
 - Reprezentați desfășurarea tetraedrului. **3 p**
 - Aflați suprafața totală a corpului. **3 p**
 - Care este înălțimea tetraedrului? **3 p**
 - Corpul a fost topit și din metalul obținut au fost create piese – tetraedre regulate cu muchia de 3 cm. Cîte piese au fost confecționate? **3 p**
- Abajurul unei lămpi de masă de forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată fără baze (vezi desenul) se confecționează din pînză. Va ajunge oare o bucată de pînză de forma unui pătrat cu latura de 50 cm? **4 p**



Varianta II

- O vază de forma unei prisme triunghiulare regulate cu latura bazei de 12 cm și înălțimea de 30 cm este pe jumătate plină cu apă.
 - Reprezentați desfășurarea prisme la scara 1: 3. **3 p**
 - Aflați aria laterală a prisme. **3 p**
 - Câți litri de apă sînt în vază? **3 p**
 - Apa din vază se toarnă într-un vas cubic cu muchia de 20 cm. La ce înălțime s-a ridicat apa în vasul cubic? **3 p**
 - Aflați raportul dintre capacitatea vasului cubic și a vasei. **3 p**
- Un corp metallic are forma unui tetraedru regulat.
 - Aflați lungimea unei muchii a tetraedrului, dacă suma lungimilor tuturor muchiilor este egală cu 72 cm. **2 p**
 - Reprezentați desfășurarea tetraedrului. **3 p**
 - Aflați suprafața totală a corpului. **3 p**
 - Care este înălțimea tetraedrului? **3 p**
 - Corpul a fost topit și din metalul obținut au fost create piese – tetraedre regulate cu muchia de 6 cm. Cîte piese au fost confecționate? **3 p**
- O lustră de forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată fără baze (vezi desenul) se confecționează din sticlă. Va ajunge oare o bucată de sticlă de forma unui pătrat cu latura de 50 cm? **4 p**



Baremul de notare

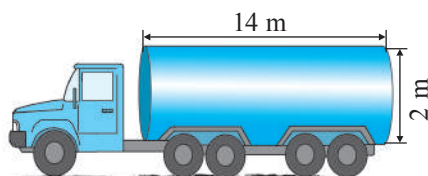
Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	33–32	31–28	27–25	24–22	21–19	18–15	14–11	10–6	5–3	2–1

În practică, în afară de poliedre, se întâlnesc corpuri mărginite total sau parțial de suprafețe neplane: sfera, cilindrul, conul etc., numite **corpuri rotunde**. Ca și în cazul poliedrelor, acestea au un șir de proprietăți interesante. De exemplu, dintre toate corpurile geometrice cu aceeași suprafață totală, sfera are volumul maxim.

Deoarece suprafețele corpurilor rotunde se obțin (după cum veți vedea) prin rotații complete ale unor figuri geometrice în jurul unei drepte, corpurile în cauză se mai numesc **corpuri de rotație**.

§ 1. Cilindrul (circular drept)

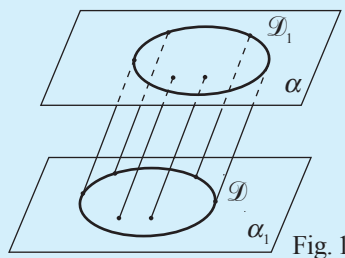
1 Administrația unei benzinării a hotărât să vopsească cele 10 cisterne (de formă cilindrică) ale automobilelor cu care se transportă carburanți. Fiecare cisternă are lungimea de 14 m și diametrul bazei de 2 m. Câte cutii de vopsea sînt necesare, dacă o cutie ajunge pentru o suprafață de 14 m²?



1.1. Elementele cilindrului

Definiții

- ◆ Corpul geometric format din două discuri congruente, situate în plane paralele, și din toate segmentele cu extremitățile aparținînd acestor discuri se numește **cilindru circular** (fig. 1).
- ◆ Cele două discuri ale cilindrului circular se numesc **baze ale cilindrului**.



Orice segment cu extremitățile în planele bazelor cilindrului, perpendicular pe ele, se numește **înălțime** a cilindrului. Lungimea acestui segment de asemenea se numește **înălțime**.

De exemplu, în figura 2 este reprezentat un cilindru cu bazele $\mathcal{D}(O, OM)$ și $\mathcal{D}_1(O_1, O_1M_1)$.

Fie \mathcal{C} și \mathcal{C}_1 cercurile care mărginesc discurile \mathcal{D} și \mathcal{D}_1 .

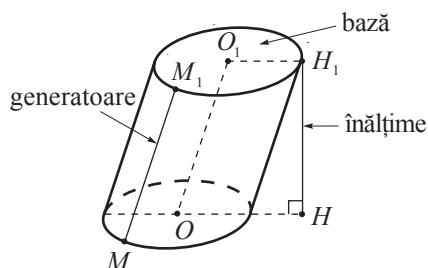


Fig. 2

Segmentele paralele cu dreapta OO_1 , ale cărei extremități aparțin cercurilor \mathcal{C}_1 și \mathcal{C}_2 , se numesc **generatoare ale cilindrului**.

Astfel, în figura 2 segmentul MM_1 este o generatoare a cilindrului.

Mulțimea tuturor generatoarelor cilindrului se numește **suprafața laterală** a cilindrului, iar mulțimea punctelor lui, care nu aparțin bazelor și nici suprafeței laterale, se numește **interiorul cilindrului**.

Dacă generatoarele unui cilindru circular sînt perpendiculare pe planele bazelor, atunci cilindrul se numește cilindru circular **drept** (fig. 3 a)), în caz contrar – cilindru circular **oblic** (fig. 3 b)).

Observăm că generatoarele cilindrului circular drept sînt înălțimi ale acestuia.

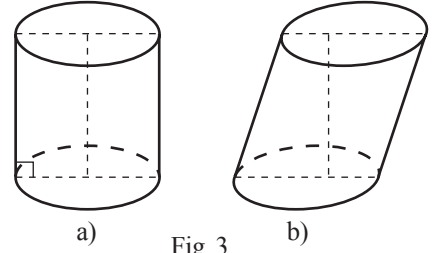


Fig. 3

Observații. 1. În clasa a IX-a vom cerceta numai cilindrul circular drept, pe care îl vom numi, pe scurt, **cilindru**.

2. În practică, mai frecvent se întîlnesc probleme ce țin de suprafața cilindrului. De aceea, pentru a scurta exprimarea, prin cilindru uneori vom înțelege numai suprafața sa.

2 Descrieți ce obțineți la rotația completă a dreptunghiului $ABCD$ în jurul dreptei AB .

Rezolvare:

La rotația completă a dreptunghiului $ABCD$ în jurul dreptei AB se obține un cilindru cu înălțimea AB și raza bazei AD (fig. 4).

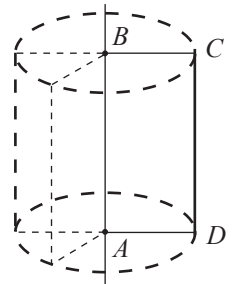


Fig. 4

1.2. Desfășurarea cilindrului. Secțiuni

1 Desfășurați un cilindru și examinați ce obțineți.

Rezolvare:

Tăind suprafața laterală a cilindrului după o generatoare, obținem o suprafață dreptunghiulară (fig. 5). Dimensiunile acestui dreptunghi sînt egale cu lungimea cercurilor bazelor și lungimea generatoarelor cilindrului. Prin urmare, desfășurarea cilindrului constă din două discuri de raze egale și o suprafață dreptunghiulară, avînd o dimensiune egală cu lungimea unuia dintre aceste discuri, iar alta – cu lungimea generatoarei lui.

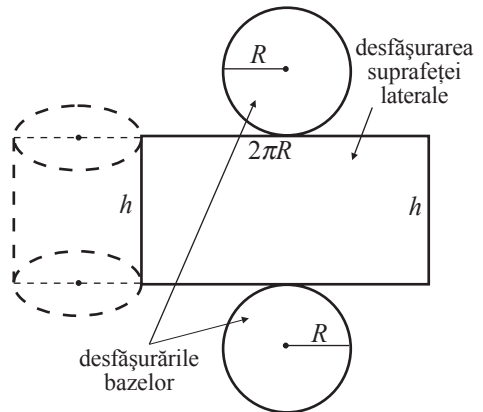


Fig. 5



Atelier. Confeccionați din carton un cilindru circular drept cu înălțimea de 15 cm și raza bazei de 5 cm.

2 Descrieți ce obțineți intersectând cilindrul cu un plan ce conține centrele bazelor cilindrului.

Rezolvare:

Fie O_1 și O_2 centrele bazelor cilindrului. Intersecția cilindrului cu un plan ce conține dreapta O_1O_2 este o suprafață dreptunghiulară $ABCD$ cu dimensiunile egale cu înălțimea cilindrului și diametrul bazelor (fig. 6).

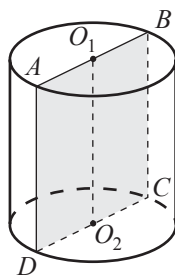


Fig. 6

Observație. Suprafața dreptunghiulară $ABCD$ se numește **secțiune axială** a cilindrului, iar dreapta O_1O_2 – **axa de simetrie** a cilindrului.

APLICĂM

• Un cilindru circular drept cu raza bazei de 10 cm și generatoarea de 16 cm este secționat paralel cu axa de simetrie a cilindrului (fig. 7). La ce distanță de la această dreaptă se află secțiunea, dacă aria ei este de 192 cm^2 ?

Rezolvare:

Secțiunea dată este o suprafață dreptunghiulară $ABCD$, având o dimensiune egală cu lungimea generatoarei cilindrului.

$$\text{Deci, } \mathcal{A}_{ABCD} = AD \cdot DC \Rightarrow DC = \frac{\mathcal{A}_{ABCD}}{AD} = \frac{192}{16} = 12 \text{ (cm)}.$$

Fie O_1M înălțimea triunghiului isoscel DO_1C cu

$$DO_1 = O_1C = 10 \text{ cm.}$$

O_1M este distanța de la axa O_1O_2 pînă la secțiune.

$$\text{Astfel, } O_1M = \sqrt{DO_1^2 - \left(\frac{DC}{2}\right)^2} = \sqrt{100 - 36} = 8 \text{ (cm)}.$$

Răspuns: 8 cm.

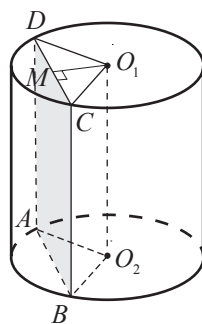


Fig. 7

1.3. Aria laterală, aria totală și volumul cilindrului

1 Fie r raza bazei unui cilindru, iar h lungimea generatoarei (înălțimea) lui. Aflați aria suprafeței laterale a cilindrului.

Rezolvare:

Deoarece desfășurarea suprafeței laterale a cilindrului este o suprafață dreptunghiulară cu dimensiunile $2\pi r$ (lungimea bazei) și h , rezultă că aria ei este $\mathcal{A}_l = 2\pi r h$.

Aria suprafeței laterale a cilindrului se numește **aria laterală** a cilindrului și se notează cu \mathcal{A}_l .

Aria totală (\mathcal{A}_t) a cilindrului este suma dintre aria laterală și ariile bazelor lui.

Cum aria unei baze este $\mathcal{A}_b = \pi r^2$, rezultă că aria totală a cilindrului este

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r).$$

2. Calculați volumul:

- unei prisme patrulateră regulată dreaptă de înălțime h și latura bazei a ;
- unui cilindru de înălțime h și raza bazelor r .

Rezolvare:

a) Volumul unei prisme este egal cu $\mathcal{A}_b \cdot h$, unde \mathcal{A}_b este aria bazei, iar h – înălțimea ei. Prin urmare, $V = a^2 \cdot h$.

b) Considerînd o prismă dreaptă cu bazele poligoane regulate cu un număr foarte mare de laturi, obținem un corp asemănător cu un cilindru (fig. 8).

Prin urmare, ca și la prisme, putem considera volumul cilindrului egal cu $\mathcal{A}_b \cdot h$. Deci, $V = \mathcal{A}_b \cdot h = \pi r^2 h$.

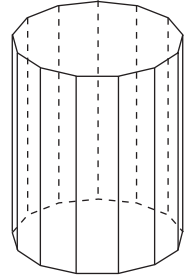


Fig. 8

Are loc

Teorema 1

Pentru orice cilindru circular drept, $\mathcal{A}_l = 2\pi r h$,

$$\mathcal{A}_t = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r),$$

$$V = \mathcal{A}_b \cdot h = \pi r^2 h,$$

unde r , h , \mathcal{A}_l , \mathcal{A}_b , \mathcal{A}_t , V sînt respectiv raza bazei, înălțimea, aria laterală, aria bazei, aria totală și volumul cilindrului.

- Rezolvarea problemei 1* (de la începutul paragrafului):

Fie S suprafața unei cisterne, S_t suprafața tuturor cisternelor.

Atunci $S = 2\pi r(h + r)$, unde $h = 14$ m, $r = 1$ m.

$$S \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 15 = 94,2 \text{ (m}^2\text{)}.$$

$$S_t = 94,2 \cdot 10 = 942 \text{ (m}^2\text{)}.$$

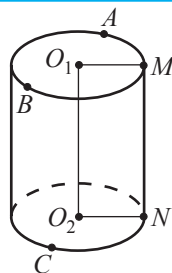
Cum $942 : 15 = 62,8$ și $62 < 62,8 < 63$, rezultă că sînt necesare 63 de cutii cu vopsea.

Răspuns: 63 de cutii.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

- Reprezentați un cilindru: a) circular drept; b) circular oblic. Numiți elementele lui.
- În figură este reprezentat un cilindru circular drept de baze $\mathcal{C}(O_1, R)$, $\mathcal{C}(O_2, R)$. Identificați printre segmentele AO_1 , BO_1 , AB , MN ($MN \parallel O_1O_2$), O_1O_2 , CO_2 , CN , O_2N :
 - generatoarele;
 - înălțimile;
 - razele bazelor;
 - coardele bazelor.
- Fie o suprafață dreptunghiulară de dimensiunile l și L . Reprezintă oare ea desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru circular drept de bază $\mathcal{C}(O_1, R)$ și generatoare G , dacă:
 - $L = 0,8\pi$, $l = \frac{2}{5}$, $R = 0,4$, $G = 0,4$;
 - $L = \sqrt{12}$, $l = \frac{1}{3}$, $R = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$, $G = 0,3$;
 - $L = 6\pi^2$, $l = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $R = 3\pi$, $G = \frac{\sqrt{2}}{2}$?
- Fie un cilindru circular drept de baze $\mathcal{C}(O_1, R)$, $\mathcal{C}(O_2, R)$ și generatoare G , $h = O_1O_2$, \mathcal{A}_b , \mathcal{A}_l , \mathcal{A}_t , V – respectiv aria bazei, aria laterală, aria totală și volumul cilindrului. Completați tabelul:

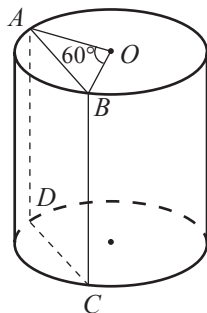


R	G	h	\mathcal{A}_b	\mathcal{A}_l	\mathcal{A}_t	V
			16π	24π		
2,5		0,4				
		5				125π
$2\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$					
		1			$1,5\pi$	

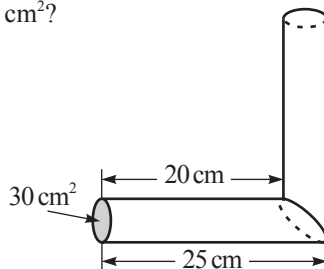
- Secțiunea axială a unui cilindru este un pătrat de arie S . Aflați suprafața totală a cilindrului și volumul lui, dacă:
 - $S = 100 \text{ cm}^2$;
 - $S = 4 \text{ cm}^2$;
 - $S = 0,64 \text{ cm}^2$.
- Un dreptunghi cu laturile de 5 cm și 8 cm se rotește în jurul laturii mai mari. Determinați aria și volumul corpului de rotație obținut.
- Valoarea raportului dintre lungimile laturilor unui dreptunghi cu aria de 48 cm^2 este egală cu 0,75. Aflați volumul corpului obținut la rotația dreptunghiului în jurul axei lui de simetrie. Câte soluții are problema?

Formăm capacitățile și aplicăm

- Dreptunghiul $ABCD$ are $AB = a$ și $m(\angle CAB) = \alpha$. El reprezintă desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru circular drept. Determinați aria totală și volumul cilindrului în două variante, știind că:
 - $a = 24 \text{ cm}$ și $\alpha = 30^\circ$;
 - $a = 10 \text{ cm}$ și $\alpha = 45^\circ$;
 - $a = 16 \text{ cm}$ și $\alpha = 60^\circ$.
- În desen este reprezentat un cilindru. $[AD]$ și $[BC]$ sînt două generatoare ale cilindrului. Aflați aria laterală a cilindrului, dacă O este centrul unei baze, iar $\mathcal{A}_{ABCD} = 20 \text{ cm}^2$.



10. Înălțimea cilindrului circular drept este H , iar raza bazei lui – R . Aflați aria secțiunii duse paralel cu axa cilindrului la distanța d de la ea, dacă:
- a) $R = 5$ cm; $H = 10$ cm; $d = 4$ cm; b) $R = \sqrt{17}$ cm; $H = 4$ cm; $d = 4$ cm;
 c) $R = x$; $H = 2x$; $d = 0,5x$.
11. Aflați volumul unei pietre, dacă la scufundarea ei într-un vas cilindric de rază R nivelul apei crește cu x :
- a) $R = 8$ cm; $x = 3$ cm; b) $R = 3\sqrt{2}$ cm; $x = 2\sqrt{2}$ cm.
12. Să se afle masa unei țevi de lungime l , cu grosimea x și diametrul interior H , dacă densitatea materialului este ρ :
- a) $l = 3$ m; $x = 5$ cm; $H = 10$ cm; $\rho = 10$ g/cm³;
 b) $l = 4\sqrt{2}$ m; $x = \sqrt{2}$ cm; $H = 9\sqrt{2}$ cm; $\rho = \frac{12}{\sqrt{2}}$ g/cm³.
13. Înălțimea unui cilindru circular drept este de 8 cm, iar volumul lui – de 72π cm³. Determinați aria totală a cilindrului.
14. Care cratiță are capacitatea mai mare, dacă prima este îngustă și înaltă, iar a doua – de două ori mai largă și de două ori mai joasă decât prima?
15. Raza bazei cilindrului este de 5 cm, aria suprafeței laterale este de 3 ori mai mare decât aria unei baze. Aflați aria totală și volumul cilindrului.
16. Valoarea raportului dintre înălțimea unui cilindru și raza bazei lui este egală cu 1,6. Determinați aria totală și volumul cilindrului, dacă se știe că aria suprafeței laterale a acestuia este egală cu 80π cm².
17. Înălțimea cilindrului este de 8 cm, raza bazei lui – de 5 cm. La ce distanță de la axă, paralel cu ea, trebuie secționat cilindrul, pentru ca aria secțiunii să fie de 48 cm²?
 Compuneți și rezolvați o problemă asemănătoare.
18. Cît va cântări o bară cilindrică de fier cu diametrul bazei de 10 cm și lungimea de 0,5 m, știind că densitatea fierului este de 7850 kg/m³?
19. În desen este reprezentat un corp format din două bucăți de țevă identice. Aflați volumul corpului.



Dezvoltăm capacitățile și creăm

20. Dintr-o bară cilindrică se execută un număr maxim de piulițe de forma unui pătrat cu latura de 12 cm, cu pierdere minimă de material. În fiecare piuliță se execută un orificiu cu diametrul de 6 cm. Aflați diametrul barei și cît la sută din volumul barei se pierde prin prelucrare.
21. Dintr-o bară cilindrică cu diametrul de 14 cm se confecționează piulițe hexagonale regulate cu grosimea de 4 cm. Care este numărul maxim de piulițe ce pot fi executate din bara de 89 cm și cît la sută din volumul barei se pierde, dacă în fiecare piuliță se execută un orificiu cu diametrul de 8 mm?
22. De câte ori trebuie mărită înălțimea unui cilindru circular drept, fără a schimba baza lui, pentru a-i mări volumul de 8 ori?
 Compuneți și rezolvați o problemă asemănătoare.
23. De câte ori trebuie mărită raza bazei unui cilindru circular drept, fără a schimba înălțimea lui, pentru a-i mări volumul de 8 ori?

§ 2. Conul (circular drept)

INVESTIGĂM

1 O grămadă de grâu de formă conică are înălțimea de 2,4 m, iar suprafața bazei – de 26 m². Aflați cantitatea de grâu din grămadă, dacă o tonă de grâu ocupă 1,3 m³.

2.1. Elementele conului

Definiții

Fie \mathcal{D} un disc și V un punct care nu aparține planului discului.

- ◆ Corpul geometric format din toate segmentele cu o extremitate V și cealaltă aparținând discului \mathcal{D} se numește **con circular** (fig. 9).
- ◆ Discul \mathcal{D} se numește **baza** conului, iar punctul V – **vîrf**ul conului.
- ◆ Segmentele cu o extremitate V și cealaltă aparținînd cercului care mărginește baza conului se numesc **generatoare**.

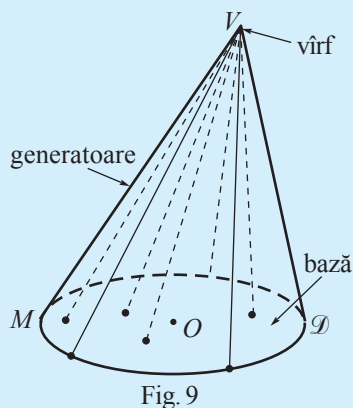


Fig. 9

De exemplu, în figura 9 este reprezentat un con cu vîrf V și baza \mathcal{D} . Segmentul VM este o generatoare a acestui con.

Fie O centrul bazei conului circular (fig. 10).

Dacă dreapta VO este perpendiculară pe baza conului, atunci conul se numește **drept** (fig. 10 a)), altfel el se numește **oblic** (fig. 10 b)).

Mulțimea tuturor generatoarelor conului se numește **suprafața laterală a conului**. Mulțimea punctelor conului ce nu aparțin nici suprafeței laterale, nici bazei conului se numește **interiorul conului**.

Perpendiculara coborîtă din vîrf V pe planul bazei lui se numește **înălțimea conului** (fig. 10).

Lungimea acestui segment de asemenea se numește **înălțime**.

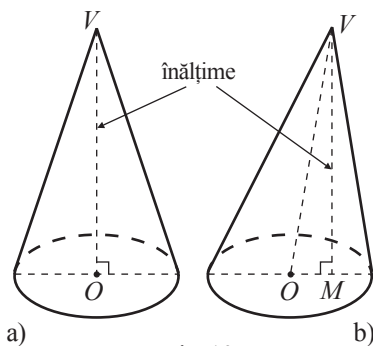


Fig. 10

Observații. 1. Înălțimea conului circular drept coincide cu segmentul cu extremitățile în vîrf V și centrul bazei O .

2. Deseori, pentru a scurta exprimarea, vom numi con numai suprafața sa.

3. În clasa a IX-a vom cerceta numai conul circular drept, pe care îl vom numi, pe scurt, **con**.

- 2 Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle ABC) = 90^\circ$.
 Descrieți ce obțineți la rotația completă a triunghiului ABC în jurul dreptei AB .

Rezolvare:

La rotația triunghiului ABC în jurul dreptei AB se obține un con circular drept cu generatoarea AC și raza bazei BC (fig. 11).

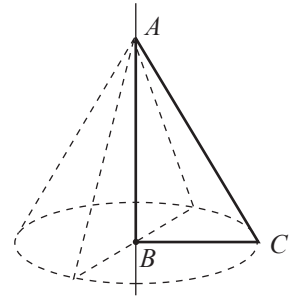


Fig. 11

2.2. Desfășurarea conului. Secțiuni

- 1 Desfășurați un con și examinați ce obțineți.

Rezolvare:

Tăind suprafața laterală a unui con după o generatoare, obținem o suprafață de forma unui sector de cerc (fig. 12) cu raza egală cu lungimea generatoarei conului. Lungimea arcului de cerc determinat de sector este egală cu lungimea cercului de la bază.

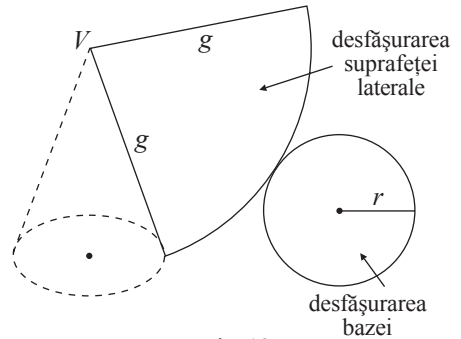


Fig. 12



Atelier. Confeționați din carton un con cu generatoarea de 10 cm și raza bazei de 5 cm.

• Intersectând conul cu un plan ce conține vârful și centrul bazei conului, obținem o secțiune mărginită de un triunghi isoscel. Această secțiune se numește **secțiune axială a conului**. În figura 13 suprafața mărginită de triunghiul ABC este secțiune axială a conului.

Observație. Dreapta VO , unde V este vârful, iar O – centrul bazei conului, se numește **axă de simetrie** a conului.

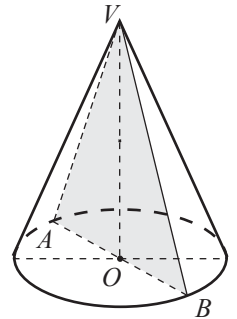


Fig. 13

2.3. Aria laterală, aria totală și volumul conului

- 1 Fie g generatoarea, iar r raza bazei conului.

- Aria suprafeței laterale a conului se numește **aria laterală** a conului și se notează cu \mathcal{A}_l .
- $\mathcal{A}_l = \pi gr$.
- **Aria totală** (\mathcal{A}_t) a conului este egală cu suma dintre aria laterală și aria bazei conului.

APLICĂM

• Să se afle aria suprafeței corpului obținut la rotația unui pătrat cu latura a în jurul diagonalei sale.

Rezolvare:

Prin rotația pătratului în jurul diagonalei sale obținem un corp format din două conuri congruente cu raza bazei (r) egală cu o jumătate din lungimea diagonalei pătratului și generatoarea (g) congruentă cu latura pătratului (fig. 14).

Luînd în considerație răspunsul problemei 1, obținem:

$$\mathcal{A} = 2 \cdot \pi g r = 2 \cdot \pi \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = a^2 \pi \sqrt{2}.$$

Răspuns: $a^2 \pi \sqrt{2}$ u. p.

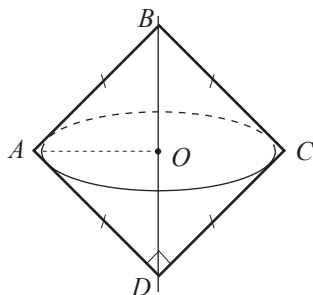


Fig. 14

2 Aflați volumul conului cu înălțimea h și raza bazei r .

Rezolvare:

Considerînd o piramidă regulată cu baza un poligon regulat cu un număr foarte mare de laturi, obținem un corp asemănător cu un con (fig. 15). Prin urmare, ca și în cazul piramidei, volumul conului poate fi calculat după formula $V = \frac{1}{3} \mathcal{A}_b \cdot h$.

Dar $\mathcal{A}_b = \pi r^2$. Deci, $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

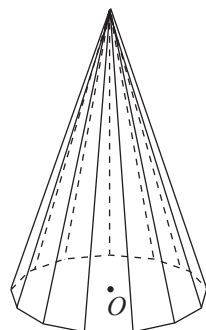


Fig. 15

Teorema 2

Pentru orice con circular drept, $\mathcal{A}_l = \pi g r$,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b = \pi g r + \pi r^2 = \pi r (g + r),$$

$$V = \frac{1}{3} \mathcal{A}_b \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h,$$

unde r , g , h , \mathcal{A}_l , \mathcal{A}_b , \mathcal{A} , V sînt respectiv raza bazei, generatoarea, înălțimea, aria laterală, aria bazei, aria totală și volumul conului.

• *Rezolvarea problemei 1* (de la începutul paragrafului):

Fie V volumul ocupat de grîu.

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h, \text{ unde } r \text{ este raza bazei grămezii, iar } h = 2,4 \text{ m.}$$

Din condiția problemei, $2\pi r^2 = 26$ (m).

$$\text{Prin urmare, } V = \frac{1}{3} \cdot 26 \cdot 2,4 = 20,8 \text{ (m}^3\text{)}.$$

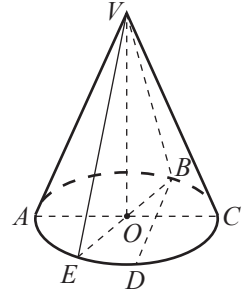
Deci, grîul cîntărește $20,8 : 1,3 = 16$ (t).

Răspuns: 16 tone de grîu.

Exerciții și probleme

■ Fixăm cunoștințele

- Reprezentați un con:
 - circular drept;
 - circular oblic.
- În figură este reprezentat un con circular drept cu centrul bazei O . Identificați:
 - generatoarele;
 - înălțimile;
 - razele bazei;
 - coardele bazei.
- Ilustrați desfășurarea unui con circular drept cu generatoarea g și raza bazei R , dacă:
 - $g = 5$ cm, $R = 2$ cm;
 - $g = 7$ cm, $R = 3$ cm.
- Fie un con circular drept de bază $\mathcal{C}(O, R)$, \mathcal{A}_b , \mathcal{A}_l , \mathcal{A}_t , \mathcal{V} sînt respectiv aria bazei, aria laterală, aria totală și volumul conului, g – generatoarea, iar h – înălțimea conului. Completați tabelul:

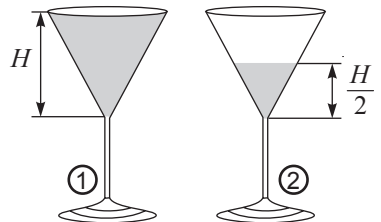
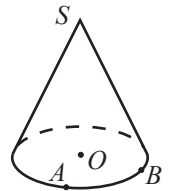


R	g	h	\mathcal{A}_b	\mathcal{A}_l	\mathcal{A}_t	\mathcal{V}
4		3				
5	13					
		4				108π
8				80π		
	7					30π

- Un triunghi isoscel cu laturile de 5 cm, 5 cm și 6 cm se rotește în jurul axei lui de simetrie. Aflați aria totală și volumul corpului geometric obținut.
- Un triunghi isoscel cu laturile de 13 cm, 13 cm și 10 cm se rotește în jurul bazei lui. Determinați aria și volumul corpului geometric obținut.

■ ■ Formăm capacitățile și aplicăm

- Aria totală a unui con circular drept este de 253 cm², iar aria lui laterală – de 11 cm². Aflați lungimea generatoarei conului.
- Determinați aria secțiunii conului ce conține punctele S, A, B , dacă $SO = 10$ cm, $OA = 3$ cm, $AB = 4$ cm.
- Un triunghi dreptunghic cu catetele de 4,5 cm și 6 cm se rotește în jurul înălțimii coborâte din vârful unghiului drept. Aflați aria totală și volumul corpului de rotație obținut.
- Aria secțiunii axiale a unui con este S . Aflați aria laterală și volumul conului, dacă raza bazei conului este R .
- Examinați desenul. În primul pahar (de formă conică) sînt 200 ml de suc. Cît suc se află în paharul al doilea, acesta fiind identic cu primul?



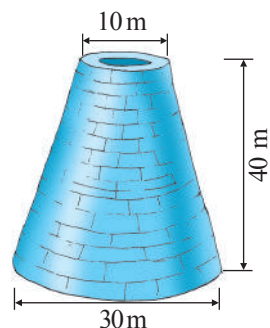
■ ■ ■ Dezvoltăm capacitățile și creăm

- Aria secțiunii obținute la intersecția conului cu un plan, paralel cu baza conului, este egală cu S . Secțiunea se află la distanța d de la vârful conului, iar h este înălțimea conului. Determinați aria laterală și volumul conului.

13. Un triunghi dreptunghic cu catetele a și b se rotește în jurul ipotenuzei. Aflați volumul corpului obținut.
14. Aria bazei unui con circular drept este de 9π cm². Determinați aria suprafeței totale a conului, dacă volumul lui este de 12π cm³.
15. Generatoarea unui con circular drept este de 10 cm, iar unghiul secțiunii axiale de pe lângă vîrf – de 120° . Aflați volumul conului.
16. Un triunghi echilateral cu latura de 8 cm se rotește în jurul dreptei ce conține un vîrf al triunghiului și este paralelă la latura ce nu conține acest vîrf. Determinați volumul corpului de rotație obținut.
17. Un romb cu latura de 8 cm și unghiul ascuțit de 60° se rotește în jurul unei laturi. Aflați volumul corpului obținut.
18. Un trapez isoscel cu bazele de 10 cm, 12 cm și latura laterală de 10 cm se rotește în jurul bazei mari. Determinați volumul corpului obținut.

§ 3. Trunchiul de con (circular drept)

1 Un coș de fum al unei stații electrotermice are formă tronconică (vezi desenul). Diametrul exterior al bazei mari este de 30 m, iar al bazei mici – de 10 m. Înălțimea coșului este de 40 m. Ce cantitate de ciment s-a consumat la tencuirea suprafeței laterale a coșului, dacă pentru 10 m² de suprafață s-au folosit 50 kg de ciment?



3.1. Elementele trunchiului de con

INVESTIGĂM

Intersecția unui con cu un plan paralel cu baza conului este un disc. Partea conului mărginită de acest disc și de baza conului se numește **trunchi de con** (fig. 16). Ambele discuri ale trunchiului de con se numesc **baze**. Segmentele trunchiului de con, conținute de generatoarele conului, se numesc **generatoare** ale trunchiului de con. Mulțimea generatoarelor trunchiului de con formează **suprafața laterală** a trunchiului de con. Segmentul trunchiului de con, conținut de înălțimea conului, se numește **înălțimea** trunchiului de con.

Fie O, O_1 centrele bazelor trunchiului de con. Segmentul OO_1 este **înălțimea** trunchiului de con. Lungimea acestui segment de asemenea se numește **înălțime**.

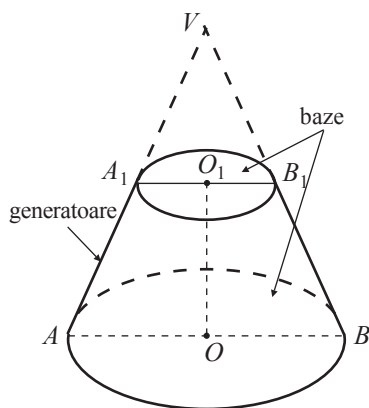


Fig. 16

2 Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic cu $m(\angle A) = 90^\circ$.

Descrieți ce obțineți la rotația trapezului $ABCD$ în jurul dreptei AB .

Rezolvare:

La rotația trapezului $ABCD$ (fig. 17) în jurul dreptei AB se obține un trunchi de con circular drept. Baza mică (mare) a trapezului este congruentă cu raza bazei mici (mari) a trunchiului de con, iar AB este înălțimea trunchiului de con.

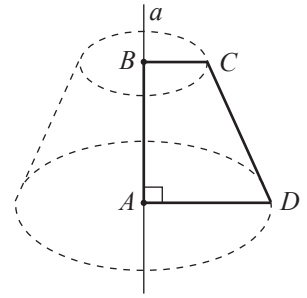


Fig. 17

3.2. Desfășurarea trunchiului de con. Secțiuni

1 Desfășurați un trunchi de con și examinați ce obțineți (fig. 18).

Rezolvare:

Tăind suprafața laterală a unui trunchi de con după o generatoare, obținem o figură numită *sector de coroană circulară*.

Observăm că lungimile arcelor coroanei circulare sînt egale cu lungimile bazelor trunchiului de con.

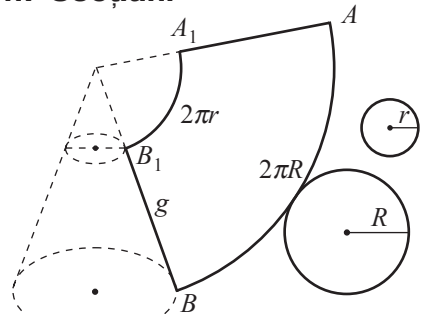


Fig. 18



Atelier. Confeționați din carton un trunchi de con cu razele bazelor de 2 cm și 4 cm și generatoarea de 10 cm.

Intersectînd trunchiul de con cu un plan ce conține centrele bazelor trunchiului de con, obținem o secțiune care se numește *secțiune axială* a trunchiului de con.

Secțiunea axială a trunchiului de con este o suprafață mărginită de un trapez isoscel (fig. 19).

Observație. Dreapta OO_1 , unde O și O_1 sînt centrele bazelor trunchiului de con, se numește *axa de simetrie* a trunchiului de con.

- Descrieți ce obțineți intersectînd trunchiul de con cu un plan ce nu conține centrele bazelor lui, dar este paralel cu dreapta determinată de ele.

2 (opțional). Aflați aria suprafeței laterale a trunchiului de con cu razele bazelor R și r și generatoarea g (fig. 20).

Rezolvare:

Fie \mathcal{A}_1 aria suprafeței laterale a trunchiului de con, \mathcal{A} aria laterală a conului din care provine trunchiul de con, iar \mathcal{A}_2 aria laterală a conului mic.

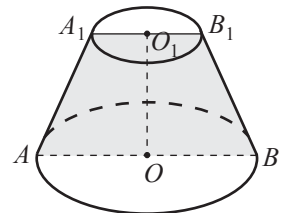


Fig. 19

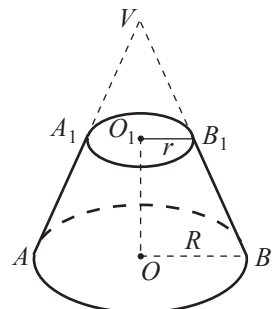


Fig. 20

Notăm prin l generatoarea conului mic, atunci $g + l$ este generatoarea conului mare.

Obținem $\mathcal{A}_l = \mathcal{A} - \mathcal{A}_1 = \pi R(l + g) - \pi rl = \pi Rg + \pi l(R - r)$ (*).

Observăm că $\frac{R}{r} = \frac{g+l}{l}$, de unde $l = \frac{rg}{R-r}$.

Substituind în formula (*), obținem:

$$\mathcal{A}_l = \pi Rg + \pi \cdot \frac{rg}{R-r} \cdot (R-r) = \pi g(R+r).$$

Răspuns: $\pi g(R+r)$.

APLICĂM

• Fie trapezul $ABCD$ cu baza mare AB , $DC = 10$ cm, $m(\angle A) = m(\angle B) = 45^\circ$ și înălțimea de 6 cm (fig. 21). Determinați aria totală a corpului obținut prin rotația acestui trapez în jurul axei lui de simetrie.

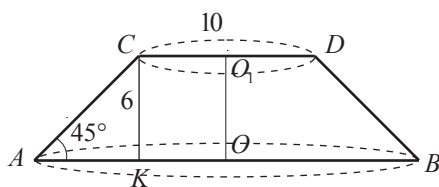


Fig. 21

Rezolvare:

Fie O și O_1 mijloacele bazelor AB și CD .

OO_1 este axa de simetrie a trapezului.

La rotația trapezului $ABCD$ în jurul dreptei OO_1 se obține un trunchi de con cu bazele de raze AO și CO_1 și înălțimea OO_1 . Fie CK înălțimea trapezului.

Triunghiul AKC este dreptunghic isoscel. Deci, $AK = CK$. Deoarece $KO = CO_1$, obținem $AO = AK + KO = 6 + 5 = 11$ (cm). $AC = \frac{AK}{\cos 45^\circ} = 6\sqrt{2}$ (cm). Astfel, luând în considerație răspunsul problemei 2, aria totală a trunchiului de con este:

$$\mathcal{A}_l = \mathcal{A}_1 + \pi \cdot AO^2 + \pi \cdot CO_1^2 = \pi \cdot 6\sqrt{2} \cdot 16 + \pi \cdot 121 + \pi \cdot 25 = (96\sqrt{2} + 146)\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Răspuns: $(96\sqrt{2} + 146)\pi \text{ cm}^2$.

• Rezolvarea problemei 1 (de la începutul paragrafului):

Fie S suprafața tencuită. Atunci, ținând cont de răspunsul problemei 2, $S = \pi g(R+r)$, unde R, r, g sînt respectiv raza mare, raza mică și generatoarea trunchiului de con corespunzător coșului (fig. 22) și $R = 15$ m, $r = 5$ m.

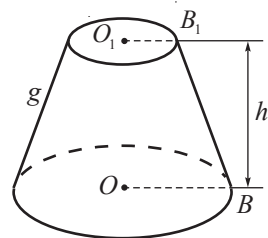


Fig. 22

Observăm (fig. 23) că $g = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$.

Deci, $g = \sqrt{40^2 + 10^2} = \sqrt{1700} = 10\sqrt{17}$ (m).

Atunci $S \approx 3,14 \cdot 10\sqrt{17} \cdot 20 \approx 2589,3$ (m²).

Prin urmare, s-au consumat aproximativ $(2589,3 : 10) \cdot 50 = 12946,5$ (kg) de ciment.

Răspuns: 12946,5 kg de ciment.

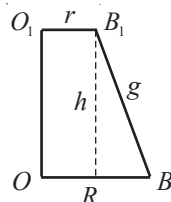
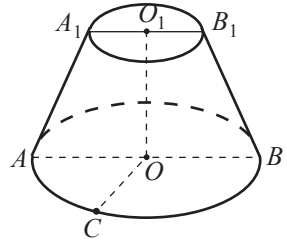


Fig. 23

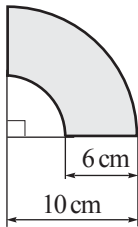
Exerciții și probleme

■ Fixăm cunoștințele

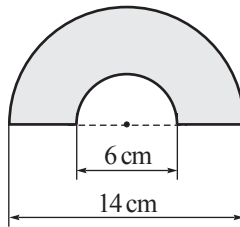
- Reprezentați un trunchi de con:
 - circular drept;
 - circular oblic.
- În figură este reprezentat un trunchi de con circular drept. Identificați:
 - generatoarele;
 - înălțimile;
 - razele bazelor.
- Un trapez isoscel cu bazele de 10 cm și 5 cm se rotește în jurul axei lui de simetrie. Descrieți corpul de rotație obținut, dacă înălțimea trapezului este de 8 cm.
- Ilustrați desfășurarea unui trunchi de con circular drept cu generatoarea g și razele bazelor R, r , dacă:
 - $g = 6$ cm, $R = 3$ cm, $r = 1$ cm;
 - $g = 8$ cm, $R = 4$ cm, $r = 2$ cm.
- Utilizând datele din desen, determinați razele bazelor, lungimea generatoarei și înălțimea trunchiului de con circular drept, a cărui desfășurare a suprafeței laterale coincide cu sectorul de coroană circulară reprezentat:



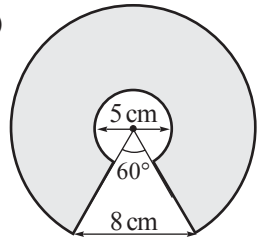
a)



b)



c)



■ Formăm capacitățile și aplicăm

- Aflați razele bazelor și înălțimea unui trunchi de con, știind că secțiunea lui axială este mărginită de un patrulater cu laturile de 12 cm, 125 cm, 125 cm, 100 cm.
- Determinați lungimea generatoarei unui trunchi de con cu diametrele bazelor de 12 cm și 28 cm și aria secțiunii axiale a trunchiului egală cu 120 cm².
- Raza cercului circumscris secțiunii axiale a unui trunchi de con este de 42,5 cm. Aflați lungimea generatoarei trunchiului, dacă ariile bazelor sînt egale cu 1764π cm² și 324π cm².
- Un trunchi de con are înălțimea de 4 cm și generatoarea de $4\sqrt{2}$ cm. Aflați înălțimea conului din care provine trunchiul, dacă media aritmetică a razelor bazelor este egală cu 10 cm.
- Aria secțiunii axiale a unui trunchi de con este de 81 cm². Determinați raza bazei mari a trunchiului, dacă raza bazei mici este de 2,5 cm, iar generatoarea trunchiului – de 9 cm.
- Razele bazelor unui trunchi de con sînt de 8,7 cm și 5,3 cm. Aflați lungimea generatoarei trunchiului, dacă aria secțiunii axiale a acestuia este egală cu 119 cm².

Dezvoltăm capacitățile și creăm

12. Centrul cercului circumscris secțiunii axiale a unui trunchi de con coincide cu centrul bazei mari a trunchiului. Aflați raza bazei mari a trunchiului, dacă raza bazei mici este de 5 cm, iar aria secțiunii axiale a acestuia este egală cu 216 cm^2 .
- 13*. Razele bazelor și înălțimea unui trunchi de con circular drept sînt direct proporționale cu numerele 3, 6 și 4. Determinați volumul trunchiului de con, dacă lungimea generatoarei este egală cu 25 cm.
14. Secțiunea axială a unui trunchi de con este un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare. Aflați razele bazelor trunchiului de con, dacă se știe că o rază este de două ori mai mare decât cealaltă, iar volumul conului din care provine trunchiul este de $64\pi \text{ cm}^3$.

§ 4. Sfera

- 1 Șase băieți au mîncat egal un pepene verde cu raza de 20 cm, iar patru fete au mîncat egal un pepene verde cu raza de 15 cm. Cui i-a revenit mai mult pepene verde: unei fete sau unui băiat?



4.1. Elementele sferei

INVESTIGĂM

- 2 Fie O un punct și R un număr real pozitiv.
- a) Care este locul geometric al punctelor din plan situate la distanța R de punctul O ?
 - b) Ce se obține prin rotația în plan a unui segment de lungime R în jurul unei extremități (fixate)?
 - c) Denumiți locul geometric al punctelor din spațiu situate la distanța R de punctul O .

Rezolvare:

- a) Locul geometric al punctelor din plan situate la distanța R de punctul O este cercul $\mathcal{C}(O, R)$ (fig. 24).
- b) Rotind complet un segment de lungime R în jurul unei extremități, obținem un disc de rază R (fig. 25).
- c) Mulțimea punctelor din spațiu situate la distanța R de punctul O se numește **sferă de centru O și rază R** .

Notăm: $\mathcal{S}(O, R)$. Deci, $\mathcal{S}(O, R) = \{M \mid OM = R\}$.

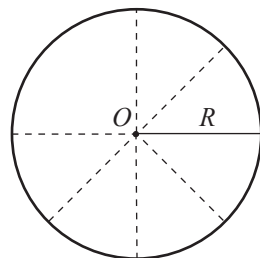


Fig. 24

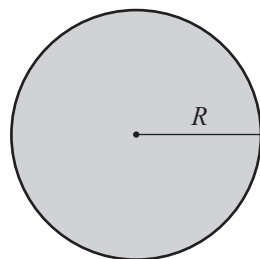


Fig. 25

Orice segment care unește centrul sferei cu un punct al ei se numește **rază** (fig. 26). Segmentul care unește două puncte ale sferei se numește **coardă**. Coarda ce conține centrul sferei se numește **diametru**.

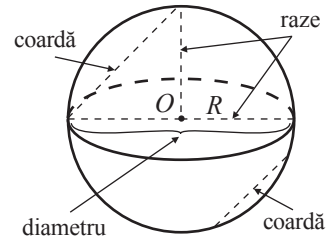


Fig. 26

3 Numiți locul geometric al punctelor din spațiu:

- situate la o distanță mai mică decât R de punctul O ;
- situate la o distanță mai mare decât R de punctul O .

Rezolvare:

a) Mulțimea punctelor din spațiu situate la o distanță mai mică decât R se numește **interiorul** sferei $\mathcal{S}(O, R)$.

Notăm: $\text{Int } \mathcal{S}(O, R)$. Deci, $\text{Int } \mathcal{S}(O, R) = \{M \mid OM < R\}$.

b) Mulțimea punctelor din spațiu situate la o distanță mai mare decât R de punctul O , adică mulțimea punctelor din spațiu care nu aparțin sferei $\mathcal{S}(O, R)$ și interiorului ei, se numește **exteriorul** sferei $\mathcal{S}(O, R)$.

Notăm: $\text{Ext } \mathcal{S}(O, R)$. Deci, $\text{Ext } \mathcal{S}(O, R) = \{M \mid OM > R\}$.

Sfera împreună cu interiorul ei se numește **bilă** sau **corp sferic**. Prin urmare, suprafața bilei este o sferă.

Secțiunea obținută la intersecția unui plan cu o sferă este un cerc (fig. 27).

Dacă centrul acestui cerc coincide cu centrul sferei, atunci el se numește **cerc mare al sferei** (fig. 28).

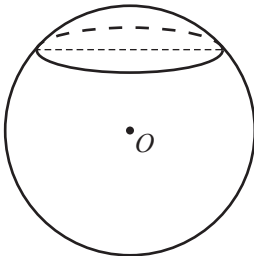


Fig. 27

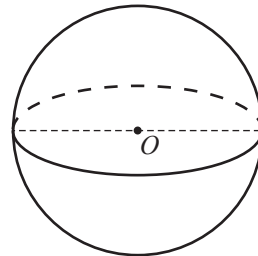


Fig. 28

4.2. Aria sferei. Volumul corpului sferic

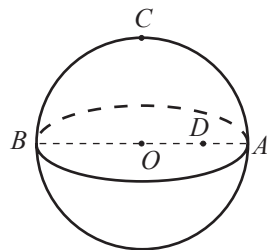
În clasa a XII-a se va demonstra că:

- aria suprafeței sferei se calculează cu ajutorul formulei $\mathcal{A} = 4\pi R^2$, unde R este raza sferei;
- volumul corpului sferic se calculează cu ajutorul formulei $\mathcal{V} = \frac{4\pi R^3}{3}$, unde R este raza acestui corp.

Exerciții și probleme

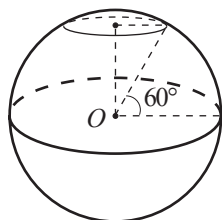
■ Fixăm cunoștințele

1. Ilustrați și notați o sferă.
2. Punctele A, B, C din desenul alăturat aparțin $\mathcal{S}(O, R)$. Identificați printre segmentele $OA, OC, OB, AB, BC, CA, DA, DC, BD$:
 - a) razele;
 - b) coardele;
 - c) diametrul.
3. Fie $\mathcal{S}(O, R)$, h distanța de la dreapta d la centrul O . Decideți care este poziția dreptei d față de sferă, dacă:
 - a) $d = 8$ cm, $R = 9$ cm.
 - b) $d = 11$ cm, $R = 7$ cm.
 - c) $d = 10$ cm, $R = 10$ cm.
4. Fie $\mathcal{S}(O, R)$ și h distanța de la planul α la centrul O . Decideți care este poziția planului α față de sferă, dacă:
 - a) $d = 5$ cm, $R = 2\sqrt{3}$ cm;
 - b) $d = \frac{7}{9}$ cm, $R = \frac{5}{8}$ cm;
 - c) $d = 5, (6)$ cm, $R = 5\frac{2}{3}$ cm.
5. Fie d distanța de la centrul $\mathcal{S}(O, R)$ la coarda AB . Determinați lungimea coardei, dacă:
 - a) $d = 3$ cm, $R = 5$ cm;
 - b) $d = 5$ cm, $R = 13$ cm;
 - c) $d = 2\sqrt{5}$ cm, $R = 2\sqrt{6}$ cm.



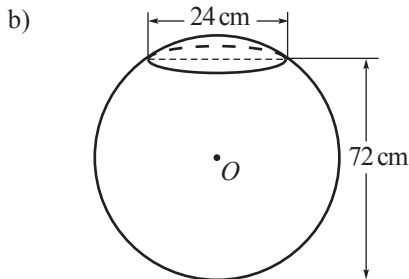
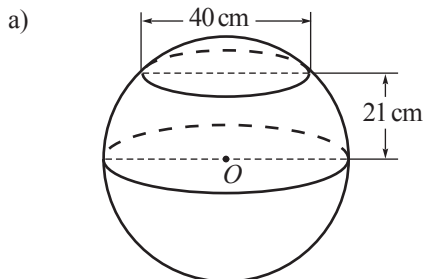
■ Formăm capacitățile și aplicăm

6. Raza sferei terestre este (aproximativ) de 6400 km. Care este lungimea unei paralele de 60° latitudine (vezi desenul)?
7. Aria cercului mare al sferei este S . Aflați aria și volumul sferei, dacă:
 - a) $S = 36\pi$ m²;
 - b) $S = 1\frac{32}{49}\pi$ m²;
 - c) $S = 27\pi$ m².
8. Fie $\mathcal{S}(O, R)$ și d distanța de la planul α la centrul O . Determinați aria cercului de intersecție a planului α cu sfera, dacă:
 - a) $R = 15$ cm, $d = 12$ cm;
 - b) $R = 8\sqrt{3}$ cm, $d = 2\sqrt{3}$ cm;
 - c) $R = d = 10$ cm.
9. Rezolvați problema propusă la începutul paragrafului.



■ Dezvoltăm capacitățile și creăm

10. Utilizând datele din desen, aflați aria sferei (O este centrul sferei):



11. Aria unei sfere este de 387 cm^2 . Aflați aria sferei al cărei volum este de 27 de ori mai mic decât volumul sferei date.
12. Aria unei sfere este de 20 cm^2 . La ce distanță de la centru trebuie secționată sfera, astfel încât aria discului mărginit de cercul din secțiune să fie egală cu $2,75 \text{ cm}^2$?

Exerciții și probleme recapitulative

■ Fixăm cunoștințele

1. Reprezentați:
 - a) un con circular drept;
 - b) un cilindru circular drept;
 - c) un trunchi de con circular drept;
 - d) o sferă.
2. Construiți desfășurarea:
 - a) unui cilindru circular drept cu raza bazei de 2 cm și generatoarea de 6 cm;
 - b) unui con circular drept cu raza bazei de 3 cm și generatoarea de 8 cm;
 - c) unui trunchi de con circular drept cu razele bazelor de 2 cm și 3 cm și generatoarea de 5 cm.
3. Desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru circular drept este o suprafață dreptunghiulară cu dimensiunile de $2\sqrt{5}$ cm și $10\sqrt{3}$ cm. Aflați aria totală și volumul cilindrului, dacă se știe că generatoarea este mai mică decât diametrul bazei lui.
4. Desfășurarea suprafeței laterale a unui con circular drept este un sector de cerc de 60° și raza de 9 cm. Aflați aria totală și volumul conului.
5. Aflați raza unui disc a cărui arie este egală cu aria totală a unui cilindru circular drept cu raza bazei de 2 cm și înălțimea de 7 cm.
6. Determinați volumul corpului obținut prin rotația unui dreptunghi cu diagonala de 5 cm și perimetrul de 14 cm în jurul laturii mai mari.
7. Determinați volumul corpului obținut prin rotația unui triunghi dreptunghic cu catetele de $3\frac{1}{3}$ cm și $2\sqrt{3}$ cm:
 - a) în jurul catetei mai mari;
 - b) în jurul ipotenuzei.

■ ■ Formăm capacitățile și aplicăm

8. Desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru este de forma unui pătrat cu diagonala de $\sqrt{72}$ cm. Aflați volumul cilindrului.
9. Înălțimea conului este congruentă cu diametrul bazei lui. Aflați raportul dintre aria bazei și aria laterală a conului.
10. Aflați aria laterală și volumul cilindrului obținut la rotația completă a unui dreptunghi de dimensiunile 5 cm și 7 cm în jurul unei laturi. Cercetați ambele cazuri.
11. O bilă cu raza de 6 cm și un cub cu latura de 9 cm sînt confecționate din același material. Comparați masa acestor corpuri.

12. Un triunghi echilateral se rotește în jurul axei lui de simetrie. Aflați volumul corpului obținut, dacă aria triunghiului este de $16\sqrt{3}$ cm².
13. Aflați raza bazei unui cilindru circular drept cu aria totală de 13π cm² și generatoarea de $1\frac{1}{4}$ cm.
14. Aflați raza bazei unui con circular drept cu aria totală de 98π cm² și generatoarea de 7 cm.
15. O bilă de rază 10 cm se află într-un vas de formă cilindrică cu raza bazei de 12 cm. În vas se toarnă 1 l de apă. Va fi acoperită oare bila de apă?
16. Diagonalele unui romb au lungimile de 6 cm și $6\sqrt{3}$ cm. Determinați aria totală a corpului obținut la rotația completă a rombului în jurul uneia dintre laturile sale.
17. Care corp are volumul mai mare: o sferă de rază 10 cm sau un tetraedru regulat cu muchia de 15 cm?

■ ■ ■ Dezvoltăm capacitățile și creăm

18. Distanța dintre centrul bazei conului și generatoarea lui este egală cu $3\sqrt{3}$ cm. Aflați aria totală și volumul conului, dacă generatoarea lui formează cu planul bazei un unghi de 60° .
19. Distanța dintre centrul bazei conului și generatoarea lui este egală cu $6\frac{1}{2}$ cm. Determinați aria totală și volumul conului, dacă generatoarea lui formează cu înălțimea conului un unghi de 60° .
20. Aria laterală a unui con este de 4 ori mai mare decât aria bazei lui. Aflați măsura unghiului la centru al sectorului de cerc care reprezintă desfășurarea suprafeței laterale a conului.
21. O sferă este înscrisă într-un con. Valoarea raportului dintre aria bazei conului și aria sferei este egală cu 0,75. Aflați măsura unghiului dintre generatoare și planul bazei conului.
22. Un triunghi echilateral se rotește în jurul unei laturi. Determinați volumul corpului obținut, dacă latura triunghiului este a .
- 23*. Aflați raza bazei mari a unui trunchi de con circular drept cu aria totală de 506π cm², aria laterală de 273π cm² și raza bazei mici de 8 cm.
- 24*. Trapezul $ABCD$ cu baza mare AB are $m(\angle A) = 90^\circ$, $AD = 8$ cm, $AB = 8$ cm, $DC = 2$ cm. Determinați volumul corpului obținut prin rotația trapezului în jurul:
 - a) laturii AB ;
 - b) bazei mici.

Test sumativ

Timp efectiv de lucru:
45 de minute



Varianta I

- Fie un cilindru circular drept cu generatoarea de 5,5 cm și raza bazei de 2 cm.
 - Desenați desfășurarea cilindrului dat. **3 p**
 - Aflați aria laterală a cilindrului. **3 p**
 - Determinați aria totală a cilindrului. **3 p**
 - Aflați volumul cilindrului. **3 p**
- Un con circular drept de metal are generatoarea de 5 cm, iar diametrul bazei de 4 cm.
 - Aflați înălțimea conului. **3 p**
 - Determinați aria laterală a conului. **3 p**
 - Aflați volumul conului. **3 p**
 - Conul a fost topit și din metalul obținut s-au confecționat bile cu raza de 1 cm. Câte bile s-au obținut? **5 p**
- Aria suprafeței unei mingi sferice este egală cu $400\pi \text{ cm}^2$.
 - Este oare posibil să punem această minge într-o cutie de forma unui cub cu muchia de 15 cm? Justificați. **5 p**
 - Mingea se află la 2 m de un perete. Un copil a lovit mingea în direcția peretului. Mingea s-a rostogolit pe o linie dreaptă de 3 ori și s-a oprit. La ce distanță de la perete se află ea? (În calcule considerați $\pi \approx 3,14$.) **6 p**
- O piesă are forma figurii care se obține la rotirea unui triunghi dreptunghic cu cateetele de 8 cm și 6 cm în jurul ipotenuzei. Aflați volumul piesei. **7 p**

Varianta II

- Fie un cilindru circular drept cu înălțimea de 6 cm și raza bazei de 3 cm.
 - Desenați desfășurarea cilindrului dat. **3 p**
 - Aflați aria laterală a cilindrului. **3 p**
 - Determinați aria totală a cilindrului. **3 p**
 - Aflați volumul cilindrului. **3 p**
- Un con circular drept are înălțimea de 12 cm, iar diametrul bazei de 10 cm.
 - Aflați generatoarea conului. **3 p**
 - Determinați aria laterală a conului. **3 p**
 - Aflați volumul conului. **3 p**
 - O bilă de metal cu raza de 15 cm a fost topită și din metalul obținut s-au confecționat conuri cu dimensiunile date mai sus. Câte conuri s-au obținut? **5 p**
- Aria suprafeței unei mingi de ping-pong este egală cu $16\pi \text{ cm}^2$.
 - Câte astfel de mingi încap într-o cutie de forma unui cilindru circular drept cu înălțimea de 12,5 cm și raza bazei de 4,2 cm? Justificați. **5 p**
 - Mingea a fost împinsă și s-a mișcat pe o dreaptă în direcția opusă a mesei de tenis. S-a rostogolit de 15 ori și s-a oprit. La ce distanță de la marginea mesei se află mingea, dacă lungimea mesei este de 2,74 m? (În calcule considerați $\pi \approx 3,14$.) **6 p**
- O piesă are forma figurii care se obține la rotirea unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza de 10 cm și un unghi ascuțit de 60° în jurul ipotenuzei. Aflați volumul piesei. **7 p**

Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	44–43	42–38	37–32	31–26	25–20	19–14	13–11	10–7	6–3	2–1

Răspunsuri și indicații

Algebră

Capitolul 1

§ 1. 3. 2) a) 0,875, nu este periodic; c) 4,(851), perioada este 851. 4. a), c), e) Numere zecimale periodice simple; b), d), f) numere zecimale periodice mixte. 7. 10 nuci; 120 de nuci. 8. d) $x_1 = 5$, $x_2 = -2$ – numere raționale; f) $x_1 = 5 - 3\sqrt{3}$, $x_2 = 5 + 3\sqrt{3}$ – numere iraționale. 9. b) $\frac{29}{9}$; c) $\frac{557}{90}$; d) $\frac{2\ 817}{550}$; e) $\frac{27\ 903}{1\ 110}$. 10. a) $1 + \sqrt{7} > 2\sqrt{3}$; d) $-\frac{1}{3} = -0,(33)$. 11. b) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$; c) 1; d) $11 - 6\sqrt{2}$. 12. c) $\{x \in \mathbb{R} | (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\}$. 15. 25 kg. 18. b) $S = \emptyset$; c) $S = \{-1, 4\}$. 19. a) $S = \{0, 0,5\}$; b) *Indicație.* $|2+x| = |5x-3| \Leftrightarrow (2+x)^2 = (5x-3)^2$.

§ 2. 1. a) $6\sqrt{2} + 5\sqrt{6} - 9,5$; b) $11,6 - 21\sqrt{2}$. 2. c) $2,828 < 2\sqrt{2} < 2,829$; d) $6,708 < 3\sqrt{5} < 6,709$. 3. c) $3 - \sqrt{2} < 1,7$; d) $1 + \sqrt{3} < 2 + \sqrt{2}$. 5. La fierbere se pierde 33% din vitamina C. 6. ≈ 170 g de unt, ≈ 130 g de zahăr, 200 g de ciocolată, 4 ouă, 2 linguri de făină. 8. b) De exemplu, $4 + (4 + \sqrt{5})$; $10 - (2 - \sqrt{5})$; $4(2 + 0,25\sqrt{5})$; $\frac{8\sqrt{2} + \sqrt{10}}{\sqrt{2}}$. 9. De 10 ori. 10. 0,5 și -1. 13. a) $8 - 2\sqrt{15}$; d) $38 + 12\sqrt{10}$. 14. b) $11\sqrt{2} - 9\sqrt{3}$; d) $26 + 15\sqrt{3}$. 15. b) $\approx -5,689$; d) $\approx 2,466$. 16. $16 + 8\sqrt{5}$. 17. Cu 36%. 19. a) $2\sqrt{13} + 3\sqrt{3} + 120\sqrt{2} - 188$. 22. $185^2 - 15^2$.

§ 3. 2. a) $a \in [2, +\infty)$; b) $a \in (-\infty, 0]$; c) $a \in (-1, +\infty)$. 3. a) $\sqrt{12}$; b) $-\sqrt{3a^2}$; c) $\sqrt{b(b-1)^2}$. 4. a) $4\sqrt{3}$; b) $7\sqrt{2}$; c) $a^2\sqrt{5}$; d) $(2-a)\sqrt{7}$. 6. a) 27; b) $\frac{1}{25}$; c) $7\frac{4}{11}$; d) $\frac{1}{16}$. 7. a) $10a^2$; b) $\frac{1}{4}x$; c) $4b^6$; d) $1000y^{-6}$. 8. a) 10; b) $\frac{4}{3}$. 9. a) $\frac{\sqrt{21}}{9}$; b) $\frac{3\sqrt{10}}{25}$; c) $\sqrt{3} - 1$; e) $4\sqrt{5} - 9$. 10. a) -12; b) 60; c) $9 + 5\sqrt{3}$; d) 11. 11. a) $x - \sqrt{5}$; b) $\frac{1}{\sqrt{a}}$; c) $-\sqrt{2}$; d) $2 - \sqrt{7}$. 12. a) $\frac{1}{9}$; b) 5; c) $40\frac{1}{2}$; d) 9; e) -0,9999; f) $\frac{1}{2}$. 13. a) 210; b) 30; c) 1 500; d) 0,4. 16. a) 500; b) 0,07; c) 4 000; d) 0,009. 17. a) 38; b) $4(\sqrt{5} - 1)$. 18. a) A; b) A; c) F; d) A. 19. a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{4}{49}$; c) $\frac{3}{2}$; d) $\frac{2}{5}$. 20. a) $\frac{\sqrt{30} - \sqrt{2}}{2}$; b) $\sqrt{10}$; c) $-\sqrt{2}$.

Exerciții și probleme recapitulative

1. b) $35 - 7\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{6}$. 3. a) $\sqrt{7} < \sqrt{10}$; b) $\sqrt{63} > \sqrt{54}$; c) $\sqrt{23} < \sqrt{103}$. 4. b) $3\sqrt{7}$; c) $3\sqrt{2} - 2$; d) $\sqrt{66} - 8$. 7. b) c^{-10} ; d) $\frac{1}{3x^5}$. 8. 10, 1 și 9. 9. 50,8 lei. 10. d) De exemplu, $3\sqrt{13} + 4\sqrt{13}$; $8\sqrt{13} - \sqrt{13}$; $2\sqrt{13} \cdot 3,5$; $\frac{91}{\sqrt{13}}$. 11. b) $11 + 4\sqrt{7}$; d) $200 + 80\sqrt{5}$. 13. a) $3\sqrt{3} - 1$; c) $14 - 6\sqrt{5}$. 14. a) $S = \{-1, 4\}$; b) $S = \{0, 0,5\}$; c) $S = \{-2, 2\}$. 15. a) $5 - 2\sqrt{3} < 2 + \sqrt{2}$; b) $6 + \sqrt{7} < 4\sqrt{7}$. 17. a) $6\frac{7}{9}$; b) $15\frac{25}{99}$; c) $\frac{637}{198}$; d) $\frac{557}{4500}$. 18. a) $-4x$; d) $-2x^2y^3\sqrt{2}$. 20. 80 cm. 21. 50 de ani și 14 ani. 22. 0,5. 27. *Indicație.* a), b), d) Efectuați substituția $|x| = t$; c) efectuați substituția $|3-x| = t$. 29. *Indicație.* Cercetați cazurile $a > 0$, $a < 0$, $a = 0$.

Capitolul 2

§ 1. 2. b). 4. a). 6. a) Nu; b) nu; c) da; d) nu. 8. $f(x) = 3x + 1$. 9. *Indicație.* Cercetați două cazuri: $p(x) = (8 + 2\sqrt{3})x$, $p(x) = (8 - 2\sqrt{3})x$, x – înălțimea trapezului. 12. a) Da; b) nu.

§ 2. 4. a) f – strict crescătoare; c) f – strict descrescătoare. 5. c), d) În cadranele II, IV. 10. a) $f(x) = 7x - 3$; c) $f(x) = x\sqrt{2} - \sqrt{3}$. 14. a) 1) Pentru $m \in (2, +\infty)$ funcția f este strict

crescătoare; 2) pentru $m \in (-\infty, 2)$ funcția f este strict descrescătoare. Pentru $m=2$ funcția f este constantă. 16. $A=2, B=10$. 18. $f(n)=3+0 \cdot n$ sau $g(n)=4+(-1)^n, n \in \mathbb{N}$.

§ 3. 4. a) $A: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty), A(a)=6a^2$. 6. a) $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x)=0$. 7. b), d) Funcția f nu are zerouri. 8. 2) *Indicație*. Axa de simetrie este dreapta $x=-\frac{b}{2a}$. 10. b) $E(f)=(-\infty; 2]$; e) $E(f)=[-0,25; +\infty)$. 13. a) $a > 0, \Delta < 0$; d) $a < 0, \Delta = 0$. 16. 1,11m; 1,78 m; 2 m; 1,78 m; 1,11m. 18. a) *Indicație*. Pot fi determinate 4 funcții. 19. Aria triunghiului mic $A_1(x)=\frac{ax^2}{2h}$; aria trapezului $A_2(x)=\frac{a(h^2-x^2)}{2h}$. 20. *Indicație*. a) Rezolvați ecuația $-2x^2-4+4=-x+2$ pentru a determina abscisele punctelor de intersecție. 21. Legitatea este x_1-x_2 , unde x_1, x_2 sînt soluții ale ecuației asociate și $x_1 > x_2$. 22. a) $a \in \mathbb{R}_-^*$; b) $a \in \mathbb{R}_+^*$. 23. $b=6, c=15$.

§ 4. 2. a) 5; -4; $-\sqrt[3]{16}$; 1,5; -1; 0,1. 5. a), b), d) Funcția f nu are extreme; c) $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x)=1$.

Exerciții și probleme recapitulative

1. b). 4. a) f_3 . 6. $l=2\pi r$. 7. a) $y=15-0,5x$. 15. a) $x=0$ – axă de simetrie; $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x)=3$; d) $x=\frac{1}{12}$ – axă de simetrie; $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x)=2\frac{23}{24}$. 17. a) Se determină 4 funcții. 18. *Indicație*. Rezolvați ecuația $f(x)=0$ și calculați valoarea $f(0)$. 20. a) *Indicație*. Fie $2+x=t$, atunci $x=2-t$. Deci, $f(t)=5t-7$. 22. $b=8; c=12$.

Capitolul 3

§ 1. 3. c) X^3Y^3Z ; d) XY^2Z^3 . 4. 1) a) 3; d) 0; 2) b) 6; c) 3. 7. b) $41X^4YZ^2$; c) $3XYZ^4$. 8. c) $4X^4Y^{12}$; d) $3,375Y^9Z^3$. 9. c) $2XZ^3$; d) $22X^2Y^2Z^2$. 10. b) $3\frac{3}{4}ZY-Z^2+XY$. 11. b) $-2XY^2Z^4 + +0,01X^3Y^5Z^2 + X^3Y^3Z^3$. 14. Legitatea este puterea respectivă a monomului.

§ 2. 5. b) $X(X-1)(X+1)^2$. 6. b) $(0,5X+1)^2$; d) $(X+1)^3$. 7. b) $(\sqrt{5}X-3\sqrt{5})(\sqrt{5}X+3\sqrt{5})$; c) $(5X-4)(25X^2+20X+16)$. 8. c) $(2-X)(1+X)$. 10. b) $\text{grad } P(X)=3$; $\text{grad } Q(X)=3$ pentru $m \in \mathbb{R}^*$ și orice $k, p, n \in \mathbb{R}$; $\text{grad } Q(X)=2$ pentru $m=0, k \in \mathbb{R}^*$ și orice $p, n \in \mathbb{R}$; $\text{grad } Q(X)=1$ pentru $m=0, k=0, p \in \mathbb{R}^*$ și orice $n \in \mathbb{R}$; $\text{grad } Q(X)=0$ pentru $m=0, k=0, p=0$ și $n \in \mathbb{R}^*$. 12. c) $(6X+1)(21X^2-3X+1)$. 13. a) $(X-2)(3X^2+2X+4)$; b) *Indicație*. Efectuați substituția $X^3=Y$; d) $(X+1)(X^3-X^2+2)$. 14. *Indicație*. Rezolvați ecuațiile de gradul II asociate polinoamelor date. 16. b) $Q(X)=-5X^4+X^3-2X^2+8$. 18. $P(X)=X^2$. 19. a) *Indicație*. Efectuați substituția $X^4=Y$; b) $(X^n-2)(X^n+2)(X^{2n}+4)$; c) $X(X^n-1)(X^n+1)$.

§ 3. 3. d) 159; e) 0; f) 6. 5. b) $C(X)=-5X^3-6X^2-5X-7, R(X)=-13$; d) $C(X)=X^7-X^6+X^5-X^4+3X^3-3X^2+3X-3, R(X)=4$. 7. $P(X)=(X^3-2)(-2X+1)+(-2X+1)^2$. 8. a) $a \in \{-5, 2\}$; b) $a \in \{-4, 1\}$; c) $a=-1$. 9. $R(X)=X-4$.

§ 4. 3. a) F; b) A; c) F; d) F. 4. a) Da; c) nu. 6. a) -1, 1; b) 0, 2, 3; c) $\frac{1}{3}$; d) $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$. 8. a) Nu; b) nu; c) da. 9. a) 2; b) 3; c) 1. 10. a) *Indicație*. Rezolvați sistemul de ecuații
$$\begin{cases} 3a+b=-2, \\ 6(a-b)=-5. \end{cases}$$
 11. $a=-5, b=1$.

§ 5. 2. b) $\frac{X^2-2X+3}{X^2-9}$; c) $\frac{X^2+5X-3}{3X(X+2)}$. 5. b) 2; c) $\frac{2X^2+6X+6}{X^2-9}$; e) $\frac{X^3-X^2-6X-16}{X^2-64}$; f) $\frac{X^3-3X-1}{X^2-1}$. 6. a) $2X$; c) $-\frac{X+10}{2X^3}$; d) $\frac{X^2-4X+4}{X+2}$; f) $\frac{X^2}{(X+2)^2(X^2+1)(X-2)}$. 8. a) $E(X)=X+5+\frac{12}{X-2}$; b) $a \in \{-10, -4, -2, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 6, 8, 14\}$.

Exerciții și probleme recapitulative

2. b) $P(X) + Q(X) = -3X^3 - X^2 + 6X + 1$; $P(X) - Q(X) = 3X^3 - X^2 - 6X - 3$; $P(X) \cdot Q(X) = 3X^5 - 3X^3 - 2X^2 - 6X - 2$. 3. a) $27X^3 + 54X^2 + 36X + 8$; d) $27X^3 + 1$. 5. b) $\left(Z - \frac{1}{2}\right)^2$; d) $(3X - 1)^2$. 6. a) $-(Y + 20)(9Y + 20)$; b) $4X(X - 9)$; d) $(Z - \sqrt{5})(Z + \sqrt{5})(Z^4 + 5Z^2 + 25)$. 7. b) $(Y - 2)(2Y^2 + 1)$; d) $(X + 1)(X^2 + \sqrt{3})$. 8. b) $C(X) = 3X^2 + 5X - 7$; $R(X) = X - 1$. 9. b) -101 . 11. a) $-2,25$. 13. *Indicație.* Aplicați teorema lui Viète pentru ecuația asociată polinomului $P(X)$.

Capitolul 4

- § 1. 3. a) \mathbb{R} ; b) $\mathbb{R} \setminus \{5\}$; c) \mathbb{R} . 4. a) $S = \{0, 5\}$; c) $S = \{-8\}$; f) $S = \left\{-\frac{7}{15}\right\}$. 7. a) $S = \mathbb{R}$; b) $S = \left\{\frac{7}{8}\right\}$; c) $S = \left\{-\frac{16}{29}\right\}$. 8. *Indicație.* a) $\frac{1}{x-5} = t$; b) $\frac{x+2}{x} = t$; c) $\frac{t}{t+1} = z$; d) $\frac{a+3}{a} = t$.

10. *Indicație.* Legitatea este $z_1 \cdot z_2 = 30$, unde z_1, z_2 sînt soluțiile ecuațiilor din stînga și respectiv din dreapta lui 30. 11. *Indicație.* Legitatea este $x_1 \cdot x_2 = 81$, unde x_1, x_2 sînt soluțiile ecuațiilor din stînga și respectiv din dreapta lui 81. 13. a) $S = \{-2\}$; c) $S = \{6, 5\}$; e) $S = \left\{-3\frac{1}{3}\right\}$.

14. a) $S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$; b) $S = \{-4, 4\}$; c) $S = \left\{-1, -\frac{1}{3}\right\}$; d) $S = \left\{-\frac{4}{11}, \frac{8}{9}\right\}$. 15. a) Pentru $m = 3$, $S = \emptyset$; pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $S = \left\{\frac{10}{m-3}\right\}$; b) pentru $m = 0$, $S = \emptyset$; pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $S = \left\{\frac{2(2-m)}{3m}\right\}$.

- § 2. 2. a) $S = \{-4, 4\}$; b) $S = \{-5, 5\}$; c) $S = \left\{-\frac{2}{5}, 0\right\}$; d) $S = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$; e) $S = \emptyset$; f) $S = \emptyset$; g) $S = \{0\}$; h) $S = \{0\}$. 3. a) $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$; b) $S = \left\{\frac{2}{5}, 1\right\}$; c) $S = \emptyset$; d) $S = \emptyset$. 4. a) $S = \{1\}$;

- b) $S = \{2, 6\}$; c) $S = \emptyset$; d) $S = \{-2\}$; e) $S = \{-1, 4\}$; f) $S = \emptyset$. 8. a) $(x-3)(x+1)$; d) $-(x+1)(3x+2)$; e) $-(x-4)(x+1)$. 9. a) $S = \{1\}$; b) $S = \emptyset$. 10. 1) a) $-\frac{3}{5}$; b) $-1\frac{4}{5}$; c) $3\frac{24}{25}$; d) $-2\frac{1}{5}$. 11. 5, 20. *Indicație.* Aplicați relațiile lui Viète; problema conduce la o ecuație de gradul II. 12. 1; 3. 13. a) $S = \emptyset$; b) $S = \emptyset$; c) $S = \left\{-\frac{1}{3}, 0\right\}$. 14. a) $S = \{-2, -1, 1, 2\}$; b) $S = \emptyset$;

- e) $S = \{-1, 1\}$; f) $S = \{-1, 1\}$. 15. a) *Indicație.* Legitatea este $x_1^2 + x_2^2 = 5$, unde x_1, x_2 sînt soluțiile ecuației date; b) *Indicație.* Legitatea este $t_1^2 - t_2^2 = \frac{8}{9}$, unde t_1, t_2 sînt soluțiile ecuației date.

17. a) $S = \{0\}$; b) $S = \emptyset$; c) $S = \{0\}$; d) $S = \{-1\}$; e) $S = \emptyset$. 20. a) $-1, 1, 5$; c) $-1, 1$; d) $-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}$.

21. a) $(t-1)(t+1)(t^2+2)$; b) $(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})(t^2+1)$. 22. *Indicație.* Grupați factorii și faceți substituția: a) $x^2 - 3x = t$; b) $x^2 + 7x = t$. 23. a) *Indicație.* Cum $x^2 = |x|^2$, faceți substituția $|x| = t$.

26. a) Pentru $m = 0$, $S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$; pentru $m = -\frac{9}{4}$, $S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$; pentru $m \in \left(-2\frac{1}{4}, +\infty\right) \setminus \{0\}$, $S = \left\{\frac{3-\sqrt{9+4m}}{2m}, \frac{3+\sqrt{9+4m}}{2m}\right\}$; pentru $m \in \left(-\infty, -2\frac{1}{4}\right)$, $S = \emptyset$; b) *Indicație.* Cercetați cazurile:

- 1) $m - 2 = 0$; 2) $m - 2 \neq 0$. e) *Indicație.* Cercetați cazurile: 1) $m = 0$; 2) $m \neq 0$.

§ 3. 2. a) 1; c) -1. 3. a) $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$; b) $S = \{-6\}$; c) $S = \left\{ \frac{\sqrt{5}}{5} \right\}$; d) $S = \{3\sqrt{2}\}$. 4. a) $S = \left\{ 3\frac{2}{3} \right\}$;
b) $S = \left\{ -2\frac{2}{3} \right\}$; c) $S = \left\{ \frac{1}{6} \right\}$; d) $S = \left\{ -\frac{6}{7} \right\}$. 5. a) $S = \{0\}$; b) $S = \emptyset$; c) $S = \{0\}$; d) $S = \{0, 6\}$.

6. a) $S = \left\{ 8\frac{5}{8} \right\}$; c) $S = \{0, 12\}$. 7. a) $S = \left\{ 0, 3\frac{1}{5} \right\}$; c) $S = \emptyset$. 9. a) $S = \mathbb{Q} \setminus \{-3\}$; c) $S = \mathbb{Q} \setminus \{4\}$.

10. c) $S = \emptyset$; d) $S = \{-5\}$. 12. a) *Indicație.* Legitatea este $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, unde x_1, x_2 sînt soluțiile ecuației date; b) *Indicație.* Legitatea este $\frac{x + x_1}{x + x_2} = 0$, unde x_1, x_2 sînt soluțiile ecuației

date. 14. c) $S = \{-5\sqrt{2}, 0, 5\sqrt{2}\}$. *Indicație.* DVA: $\mathbb{R} \setminus \{-8, -6, 6, 8\}$. Numitorul comun va fi $(t^2 - 36)(t^2 - 64)$. 15. d) DVA: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. 1) Pentru $m - 3 < 0$, $S = \emptyset$; 2) pentru $m - 3 = 0$ rezolvați ecuația $x + \frac{1}{x} - 3 = 0$; 3) pentru $m - 3 > 0$ rezolvați ecuațiile $x + \frac{1}{x} - 3 = m - 3$, $x + \frac{1}{x} - 3 = -(m - 3)$.

16. a) *Indicație.* Scrieți funcția f sub forma $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1 - x}{x^2 + 2x + 1} = 1 - \frac{x}{(x+1)^2}$; b) *Indicație.* Cercetați funcția $f(x) = 1 + \frac{x}{(x-1)^2}$.

§ 4. 2. b) $S = \{(0, 2; -0, 6)\}$; d) $S = \left\{ \left(11\frac{3}{7}, -1\frac{17}{21} \right) \right\}$. 3. b) $S = \left\{ \left(-\frac{15}{17}, 3\frac{12}{17} \right) \right\}$; d) $S = \left\{ \left(1, \frac{1}{2} \right) \right\}$.

6. a) $S = \{(0, -1)\}$; b) $S = \left\{ \left(7\frac{6}{11}, 5\frac{3}{11} \right) \right\}$; c) $S = \{(-1, 2)\}$; f) $S = \{(0, 0)\}$. 7. b) $S = \{(-2, 12)\}$;

d) $S = \left\{ \left(\frac{2}{5}, 2\frac{1}{5} \right) \right\}$. 8. *Indicație.* Legitatea este $x + y = 2,82$, unde (x, y) este soluția sistemului.

9. a) $S = \{(2, 1)\}$; b) $S = \emptyset$. 10. *Indicație.* a) Efectuați substituția $\frac{1}{x} = u, \frac{1}{y} = v$; b) efectuați substituția $\frac{1}{x-1} = u, \frac{1}{y-1} = v$; c) efectuați substituția $x^2 = u, \frac{1}{y-1} = v$. 11. 18 km/h; 24 km/h.

13. 2 km/h. 14. $a = 5$.

§ 5. 1. 1, 11. 2. 25, 10; -10, -25. 4. 43 cm, 40 cm. 6. 160 km, 120 km. 7. *Indicație.* $\overline{ab} = 10a + b$, $\overline{ba} = 10b + a$. 10. 20 de ore, 30 de ore. 12. $\frac{12 - 2\sqrt{33}}{3}, \frac{12 + 2\sqrt{33}}{3}$. 15. 25,5 lei, 39 lei.

16. *Indicație.* Alcătuiți ecuația $y^2 - x^2 = 225 \Leftrightarrow (y - x)(y + x) = 225$, unde x - lungimea catelei, iar y - lungimea ipotenuzei. Descompuneți numărul 225 în produs de numere naturale. *Răspuns:* 4 triunghiuri. 17. *Indicație.* Fie $x, y \in \mathbb{N}^*$. Rezolvați în \mathbb{N}^* ecuația $(x - y)(x + y) = 45$.

18. 20 de camioane. 20. 120 m.

Exerciții și probleme recapitulative

1. b) $S = \left\{ 1\frac{4}{11} \right\}$; d) $S = \left\{ -13\frac{2}{3} \right\}$. 2. b) $S = \{0\}$; c) $S = \emptyset$; d) $S = \emptyset$; e) $S = \{-1, 4\}$; f) $S = \emptyset$.

3. d) $S = \{-12, 15\}$; e) $S = \{-15, 10\}$; f) $S = \{-8, 4\}$. 4. b) $(3 - X)(2X + 1)$; c) $(4X + 1)^2$.

5. b) $S = \left\{ -\frac{1}{4} \right\}$; d) $S = \emptyset$. 6. d) $S = \{(2, 8)\}$; e) $S = \{(1, 2)\}$; f) $S = \{(1, 5\sqrt{2}), -5\}$. 7. b) $S = \left\{ -1, \frac{2}{3} \right\}$;

d) $S = \left\{ -1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right\}$. 8. 48 de apartamente de 2 camere și 16 apartamente de 4 camere. 10. 31 lei.

11. a) $S = \{-2\}$; b) $S = \left\{ -\frac{8}{9} \right\}$; c) $S = \{-1, 1\}$; e) $S = \{-2\}$. 13. *Indicație.* Aplicați teorema lui

Viète. 14. a) $(x - 1)^2(x + 1)^2(x^2 + x + 1)^2(x^2 - x + 1)^2$; b) *Indicație.* Efectuați substituția $(2x - 1)^2 = t$;

- c) *Indicație.* Efectuați substituția $(x-2)^2$; d) $(t-\sqrt{2})^2(t+\sqrt{2})^2$. **16.** a) $S = \{(-2, -1)\}$;
 c) $S = \{(-16,5; -49,5)\}$. **19.** 28%. **20.** $\frac{3+15\sqrt{103}}{26}, \frac{-15+3\sqrt{103}}{26}, \frac{3-15\sqrt{103}}{26}, \frac{-15-3\sqrt{103}}{26}$.
21. *Indicație.* Legitatea este $-5 = xy$; $-4 = -(x+y)$, unde (x, y) este soluția sistemului dat.
22. *Indicație.* Legitatea este $x^2 + y^2 = 17$, unde (x, y) este soluția sistemului dat. **23.** b) $-1, 1\frac{1}{3}$;
 c) $-\sqrt{5}, \sqrt{5}$. **25.** a) $S = \left\{-1; -\frac{1}{2}; 1; 1,5\right\}$; b) $S = \{-3, -1, 1\}$; c) $S = \left\{1\frac{1}{5}\right\}$. **26.** *Indicație.* a) Fie
 $x^2 = u, y^2 = v$; c) fie $x + y = t, xy = v$. **27.** Fiul are 13 ani, tata 39 de ani, mama 32 de ani.

Capitolul 5

- §1.** **3.** a) $S = (-\infty, 2)$; b) $S = (-\infty, -2)$; c) $S = (-\infty, -1]$; d) $S = \left[-\frac{7}{8}, +\infty\right)$. **4.** a) $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$;
 b) $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. **5.** a) $S = \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$; b) $S = \emptyset$; c) $S = [2,5; +\infty)$; d) $S = \left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$.
8. a) $S = (-\infty; -0,5)$; b) $S = (3, +\infty)$; e) $S = (3, +\infty)$. **9.** a) $S = \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$; c) $S = \emptyset$;
 d) $S = [2,5; +\infty)$. **10.** a) $x \in [2, +\infty)$; b) $x \in \left(-\infty, \frac{4}{5}\right)$; c) $x \in (3, 10]$. **11.** a) $S = (1, 4)$;
 c) $S = [-2, 2]$; d) $S = (-3, 4)$. **12.** 25 de cărți. **13.** $x \in (3, 13)$; **14.** 24 de locuri. **15.** $\frac{3}{8}$.
16. b) $S = \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right] \cup \left[\frac{8}{3}, +\infty\right)$; c) $S = \left(-4, -\frac{2}{3}\right)$. **17.** a) $a \in (-\infty, 2)$; b) $a \in (-\infty, 3)$.
18. d) $a \in (-\infty, -2)$. **19.** $a \in (-2, +\infty)$. **20.** a) $a \in \{-5\}$; b) $a \in (-\infty, -5)$; c) $a \in (-5, +\infty)$.
§2. **3.** a) $S = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$; b) $S = (-\infty, -8) \cup (6, +\infty)$; c) $S = \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right]$; d) $S = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{5}\right\}$;
 e) $S = \left\{\frac{2}{7}\right\}$; f) $S = \mathbb{R}$; g) $S = (-\infty, 0) \cup (7, +\infty)$; h) $S = \left(-1, \frac{5}{4}\right)$; i) $S = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$;
 j) $S = (-3, 3)$; k) $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$; l) $S = \mathbb{R}$. **4.** a) $S = (-\infty, -8) \cup (5, +\infty)$; b) $S = [-2, 0]$; c) $S = (-6, 5)$;
 d) $S = (-\infty, -4) \cup [-1, +\infty)$; e) $S = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$. **5.** a) $S = (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$; b) $S = [-5, -3]$;
 d) $S = (-\infty; -1] \cup [4,5; +\infty)$. **7.** a) $S = \left[-1, \frac{3}{2}\right]$; b) $S = \mathbb{R}$; c) $S = (-5, 4)$; d) $S = \emptyset$.
8. a) $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$; b) $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$. **9.** a) $S = (-\infty, -2) \cup (0, 3)$; b) $S = (-\infty, -5] \cup \left[-\frac{1}{2}, 3\right]$;
 c) $S = (-\infty, 1] \cup [2, 3]$; d) $S = (-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (4, +\infty)$; e) $S = \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$; f) $S = (-\infty, -1] \cup (0, 2]$;
 g) $S = [-2, 1) \cup [3, +\infty)$. **10.** Da, poate fi decupat. **11.** a) $S = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{9}{8}\right)$. **12.** $S = \{2, 3, 4, 5\}$.
13. a) $S = \emptyset$; b) $S = [-5, 0]$; c) $S = (1, 4)$. **14.** a) $x \in [-5, 1) \cup (1, 6]$; b) $x \in [-10, -6] \cup [7, 10]$.
15. a) $S = [1, 2] \cup [3, 4]$; b) $S = (-3, -1) \cup (-1, 1)$. **16.** b) $m \in (-\infty, -5)$. **17.** b) $a \in \left(0, 1\frac{1}{4}\right)$.


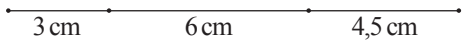
Exerciții și probleme recapitulative

- 5.** -3. **6.** a) $\left[-\frac{3}{2}, 2\right]$; b) $\left[-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$; c) $\left(-\frac{1}{3}, 2\right]$; d) $(-\infty, -1] \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$. **9.** a) $S = (-4, -1)$.
10. $S = \left(\frac{3}{5}, 5\right)$. **11.** $S = (-\infty, -6) \cup \{-1\} \cup (2, +\infty)$. **12.** Nu există atare valori. **13.** $a \in (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$.

Geometrie

Capitolul 1

§1. 5. $36^\circ, 144^\circ, 144^\circ$. 6. a) $45^\circ, 45^\circ$; b) $75^\circ, 105^\circ$; c) $9^\circ, 81^\circ$; d) $70^\circ, 70^\circ$. 9. 30° . 10. a) 0,625; b) $2\frac{2}{3}$. 11. a) $\frac{5}{9}$; b) $\frac{4}{7}$; c) $\frac{7}{16}$; d) 4,2. 12. a) $2\frac{1}{3}$; b) $\frac{4}{7}$; c) $2\frac{1}{3}$; d) $\frac{4}{11}$. 13. a) 9,6 cm; b) 5 cm.

14.  15. 

17. 11 ori. 21. *Indicație.* Utilizați egalitatea $\frac{1}{2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}$.

§2. 1. a) Da; b) nu; c) da; d) da. 3. a) 62 cm; b) $24\sqrt{5}$ cm. 4. $m(\angle A) = 40^\circ$, $m(\angle B) = 20^\circ$, $m(\angle C) = 120^\circ$. 8. a) 37 cm; b) 72 cm; c) 78 cm. 9. a) $78^\circ 5' 6''$; b) $154^\circ 54' 53''$; c) $72^\circ 4' 4''$; d) $69^\circ 25' 4''$. 10. 10 cm; 12 cm; 10 cm; 12 cm. 11. a) $M_1(3; 0)$; b) $M_1(-0,4; 0)$. 12. a) $(3 - \sqrt{7})$ cm; b) $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$ cm. 13. a) 15 cm; b) 8 cm. 14. a) $90^\circ, 130^\circ, 140^\circ$; b) $70^\circ, 145^\circ, 145^\circ$; c) $100^\circ, 110^\circ, 150^\circ$. 15. a) $PM = 12$ cm, $PN = 15$ cm; b) $AP = 2\sqrt{6}$ cm, $BP = 2\sqrt{7}$ cm. 16. $55^\circ, 125^\circ, 125^\circ$. 17. $70^\circ, 70^\circ, 110^\circ, 110^\circ$. 18. a), b) $m(\angle A) = m(\angle D) = 75^\circ$, $m(\angle B) = m(\angle C) = 105^\circ$. 19. a) $m(\angle A) = m(\angle B) = 90^\circ$, $m(\angle C) = 120^\circ$, $m(\angle D) = 60^\circ$; b) $m(\angle A) = 70^\circ$, $m(\angle B) = 110^\circ$, $m(\angle C) = m(\angle D) = 90^\circ$. 20. Între șirurile din b) și între cele din d).

21. a)

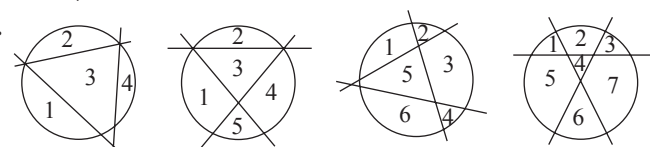
4	6	10	12	9
12	18	30	36	27

 b)

0,2	1	1,8	2	3,2	2,4
1	5	9	10	16	12

22. a) 65; b) 90. 23. $18\sqrt{3}$ cm. 24. a) $60^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 120^\circ$; b) 6 unghiuri de 60° . 25. 15 cm. 26. 18 cm. 27. a) $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$; b) 12 cm. 28. 34 cm. 29. 80 cm. 30. a) $D(-3; -4)$; b) $D(2; -3)$. 31. 4. 32. $AB = 10$ cm, $AH = 6,4$ cm, $BH = 3,6$ cm, $CH = 4,8$ cm. 33. 5 cm. 34. $AB = 9$ cm, $AC = 9\sqrt{3}$ cm. 35. 13 cm și $h = 12$ cm. 36. $60^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 120^\circ$. 37. $AB = 15$ cm, $BC = 25$ cm. 38. 26 cm. 39. 2 cm. 41. 30 cm.

Capitolul 2

§1. 4. a) 8 cm; b) 7 cm; c) $2\sqrt{10}$ cm; d) 2 cm. 5. a) 12 cm; b) 5 cm; c) 15 cm. 6. a) Secantă cercului; b) secantă cercului; c) tangentă la cerc; d) secantă cercului; e) exterioară cercului. 7. $R = 10$ cm, $AC = 10\sqrt{3}$ cm, $BM = 5$ cm. 8. a) 13,7 cm; b) 3,(4) cm; c) 8 cm. 9. a) Secantă cercului; b) secantă cercului; c) exterioară cercului; d) tangentă la cerc. 10. a) 3 cm; b) 5 cm; c) $\frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}$. 11. a) 10 cm; b) 1,5 cm. 12. 60° . 15. 30° . 16. 12 cm. 17. a) $M \in \text{Int } \Delta ABC$; b) $M \in \text{Int } \Delta ABC$; c) dacă $r > 2$, atunci $M \in \text{Int } \Delta ABC$; dacă $r = 2$, atunci $M \in \mathcal{C}(O, 2)$; dacă $0 < r < 2$, atunci $M \in \text{Ext } \Delta ABC$. 18. 20 cm. 19. 10 cm. 20. 7 cm. 21. 7,5 cm. 22. $\sqrt{15}$ cm. 24. a) 1; b) 30; c) $\sqrt{x^2 + y^2}$. 26. $(12 + \sqrt{11})$ cm. 30. 20 cm sau 40 cm. 31. 8 cm, 15 cm. 32. 5 cm. 35. 

36. 60 cm.

- § 2. 2. a) 45°; b) 90°; c) 125°. 3. a) $MN = KL$; b) $MN < KL$; c) $MN = KL$. 4. a) 44°; b) 152°; c) 17°30'; d) 80°. 5. a) 120°; b) 72°; c) 36°; d) 30°; e) 30°; f) 15°. 11. Pătrat. 12. Dreptunghi. 13. a) 50°; b) 40°; c) 65°. 14. O oră. 15. 40°. 16. 90°, 120°, 60°, 90°. 17. 180°, 90°, 60°, 30°. 18. 18,5 cm. 19. a) 3 coarde și 6 arce. 20. Măsurile arcelor vor fi egale cu 10°, 30°, 60°, 70°, 80°, 110°. 21. a) 90°; b) 35°; c) 55°; d) 20°. 22. a) 120°; b) 150°; c) 24°; d) 210°. 23. 6 cm. 24. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm. 25. 80° sau 100°. 26. $20\sqrt{3}$ cm. 27. 17 cm. 28. a) 64°; b) 117°; c) 48°; d) 57°.

33. 18,75 cm. 34. $\frac{\sqrt{15}}{2}$ cm.

- § 3. 3. a) 36 cm; b) 54 cm. 4. a) 50°; b) 30°; c) 160°; d) 60°. 5. a) 52°, 62°, 66°; b) 35°, 70°, 75°. 6. a) 2,5 cm, 6,5 cm, 5,5 cm; b) 5 cm, 9 cm, 8 cm. 7. a) Ascuțitunghic; b) obtuzunghic; c) dreptunghic; d) dreptunghic. 8. $AM = 18$ cm, $BK = 7$ cm. 9. a) 36°; b) 70°; c) 110°; d) 75°. 12. a), c) – da; b), d) – nu. 13. 5 cm. 14. a) 75°, 52°30', 52°30'; b) 68°, 64°, 48°; c) 37°, 71°, 72°. 16. a) 100°, 20°, 60°; b) 50°, 84°, 46°; c) 92°, 76°, 12°. 17. 5 cm, 5 cm, 6 cm. 19. $\sqrt{130}$ cm. 20. $2\sqrt{7}$ cm.

Exerciții și probleme recapitulative

3. 5 cm. 4. 6 cm. 5. $2\sqrt{13}$ cm. 7. a) 60°; b) 17°; c) 67°. 9. a) 6 cm; b) $4\sqrt{7}$ cm. 10. a) 12 cm; b) 0,5 cm. 11. a) 52° sau 128°; b) 74°; c) 46°; d) 61°. 12. a) 30°; b) 150°; c) 270°. 14. $4\sqrt{2}$ cm. 16. $AM = (3\sqrt{2} + 2\sqrt{17})$ cm; $BD = 2\sqrt{34} - 3\sqrt{34}$ cm. 17. 8,125 cm. 18. $3\sqrt{13}$ cm. 19. a) $m(\angle A) = 115^\circ$, $m(\angle B) = 40^\circ$, $m(\angle C) = 25^\circ$; b) $m(\angle A) = 120^\circ$, $m(\angle B) = 37^\circ$, $m(\angle C) = 23^\circ$. 20. a) $m(\angle A) = 94^\circ$, $m(\angle B) = 106^\circ$, $m(\angle C) = 86^\circ$, $m(\angle D) = 74^\circ$; b) $m(\angle A) = 97^\circ 30'$, $m(\angle B) = 140^\circ$, $m(\angle C) = 82^\circ 30'$, $m(\angle D) = 40^\circ$.

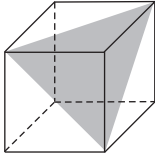
Capitolul 3

7. a) 7,3 cm, 2,5 cm; b) $11\sqrt{2}$ cm, $5\sqrt{2}$ cm; c) $\frac{2}{3}$ cm, $\frac{7}{9}$ cm; d) 16 cm, 2 cm. 8. 17 m. 11. a) $\mathcal{A} = 2\sqrt{110}$ cm²; c) $\mathcal{A} = 10\sqrt{11}$ cm². 12. a) $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ABD} = 49,5$ cm²; $\mathcal{A}_{ADC} = \mathcal{A}_{DCB} = 36$ cm²; b) $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ABD} = 87,5$ cm²; $\mathcal{A}_{ADC} = \mathcal{A}_{DCB} = 50$ cm²; c) $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ABD} = 53,25$ cm²; $\mathcal{A}_{ADC} = \mathcal{A}_{DCB} = 45$ cm²; d) $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ABD} = 21\sqrt{2}$ cm²; $\mathcal{A}_{ADC} = \mathcal{A}_{DCB} = \frac{42\sqrt{2} - 49}{2}$ cm². 15. 81 cm². 16. 42 cm. 17. 52 cm². 18. 4π m². 19. a) $24\sqrt{3}$ cm²; b) $32\sqrt{2}$ cm²; c) $80\sin 36^\circ$ cm². 20. a) $P = 48$ cm, $\mathcal{A} = 144$ cm²; b) $P = 36\sqrt{2}$ cm, $\mathcal{A} = 162$ cm²; c) $P = 4a$ cm, $\mathcal{A} = a^2$ cm²; d) $P = 2x\sqrt{2}$ cm, $\mathcal{A} = \frac{x^2}{2}$ cm². 21. a) De 9 ori; b) de 49 de ori; c) de n^2 ori. 22. a) De 2 ori; b) de $\sqrt{10}$ ori; c) de $4 - \sqrt{11}$ ori. 23. a) De 4 ori; b) de 25 de ori; c) de $\frac{8}{3}$ ori. 24. 99 cm². 25. 63 cm². 26. 216 cm². 27. 27%. 28. $(144\sqrt{2} - 96)$ cm². 29. a) 400g; b) 2100 g. 30. 48 cm². 31. 15 cm². 32. 900 cm². 33. 13 cm. 34. 70 cm². 35. $\frac{S(m+2n)}{2(m+n)}$. 36. $P = 128$ cm, $\mathcal{A} = 480$ cm². 37. $\frac{135}{2}$ cm². 38. Înălțimea corespunzătoare bazei triunghiului ABC . 39. π m. 40. 6 cm². 41. 294 cm². 42. 170 cm². 43. $3r^2 \frac{\sqrt{2}}{2}$.

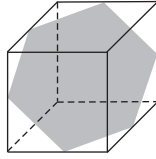
Capitolul 4

- §1. 3. b). 4. $\mathcal{A} = 54 \text{ cm}^2$, $\mathcal{V} = 27 \text{ cm}^3$. 5. $\mathcal{V} = 64 \text{ cm}^3$, $\mathcal{A} = 96 \text{ cm}^2$. 6. $\mathcal{A} = 24 \text{ cm}^2$, $\mathcal{V} = 8 \text{ cm}^3$.
7. 27 l. 9. 150 cm^2 . 10. 8 cm^3 . 11. 7,2 kg. 12. $6\sqrt{3} \text{ cm}$. 13. $3(2 + \sqrt{3}) \text{ cm}$.
14. a) $4\sqrt{3} \text{ cm}$; b) $4\sqrt{2} \text{ cm}$. 15. $\mathcal{A} = 1536 \text{ cm}^2$, $\mathcal{V} = 4096 \text{ cm}^3$.

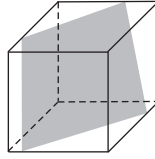
16. a)



b)



c)



- §2. 4. $\mathcal{A} = 214 \text{ cm}^2$, $\mathcal{V} = 210 \text{ cm}^3$. 5. $\mathcal{A}_1 = 156 \text{ cm}^2$, $\mathcal{A}_2 = 236 \text{ cm}^2$, $d = 5\sqrt{5} \text{ cm}$.
6. 188 cm^2 . 7. 960 cm^3 . 8. $\mathcal{A}_1 = 96 \text{ cm}^2$, $\mathcal{A}_2 = 126 \text{ cm}^2$. 9. $\mathcal{A}_1 = 126 \text{ cm}^2$, $\mathcal{V} = 63\sqrt{3} \text{ cm}^3$.
10. $\mathcal{A}_1 = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $\mathcal{A}_2 = 44\sqrt{3} \text{ cm}^2$. 11. 18 cm^2 . 12. $\mathcal{A}_1 = (96 + 32\sqrt{3}) \text{ cm}^2$, $\mathcal{V} = 64\sqrt{3} \text{ cm}^3$.
13. $\frac{45\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^3$. 14. $\mathcal{A}_1 = (105 + 50\sqrt{3}) \text{ cm}^2$, $\mathcal{V} = \frac{175\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^3$. 15. $\sqrt{7} \text{ cm}$. *Indicație.* Dacă x, y, z sînt dimensiunile paralelipipedului, atunci $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ este lungimea diagonalei. 16. $\mathcal{A}_1 = 112 \text{ cm}^2$, $\mathcal{A}_2 = 144 \text{ cm}^2$, $\mathcal{V} = 112 \text{ cm}^3$. 17. 200 cm^3 . 18. $\mathcal{A}_1 = 288 \text{ cm}^2$, $\mathcal{A}_2 = 360 \text{ cm}^2$.
19. $19\sqrt{3} \text{ kg} \approx 32,87 \text{ kg}$. 20. $\mathcal{A}_1 = 290 \text{ cm}^2$, $\mathcal{V} = 300 \text{ cm}^3$. 21. $\mathcal{A}_1 = 128 \text{ cm}^2$, $\mathcal{A}_2 = 160 \text{ cm}^2$.
22. $\mathcal{A}_1 = 90 \text{ cm}^2$, $\mathcal{A}_2 = (90 + 27\sqrt{3}) \text{ cm}^2$, $\mathcal{V} = \frac{135\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^3$. 23. $216\sqrt{3} \text{ cm}^2$. 24. $120\sqrt{3} \text{ cm}^3$.
25. b). 26. 160 cm^3 . 27. $19\frac{1}{21}$. 28. $364,5 \text{ cm}^3$. 29. 10 cm^2 . 30. $\mathcal{A}_1 = 120 \text{ cm}^2$, $\mathcal{A}_2 = (120 + 12\sqrt{3}) \text{ cm}^2$. 31. 12 m^3 . 32. 1,2 cm. 33. a) $2\sqrt{38} \text{ cm}$; b) 248 cm^2 .
34. a) $\mathcal{A}_1 = 288\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $\mathcal{A}_2 = 32(9\sqrt{3} + 2) \text{ cm}^2$, $\mathcal{V} = 384\sqrt{3} \text{ cm}^3$; b) 24 cm.
35. $\mathcal{A}_1 = (32\sqrt{3} + 144) \text{ cm}^2$, $\mathcal{V} = 96\sqrt{3} \text{ cm}^3$.
§3. 1. 45 cm^2 . 2. $\mathcal{A}_1 = 45\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $\mathcal{A}_2 = 72\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $\mathcal{V} = 36\sqrt{3} \text{ cm}^3$. 3. 9 cm^2 .
4. $\mathcal{A}_1 = (36\sqrt{3} + 72) \text{ cm}^2$, $\mathcal{V} = 24\sqrt{3} \text{ cm}^3$. 5. $63\sqrt{3} \text{ cm}^2$. 6. b). 7. $\frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^3$. 8. $\mathcal{A}_1 = 60 \text{ cm}^2$, $\mathcal{V} = 48 \text{ cm}^3$. 9. $\mathcal{A}_1 = 360 \text{ cm}^2$, $\mathcal{V} = 400 \text{ cm}^3$. 10. $\mathcal{A}_1 = 100 \text{ cm}^2$, $\mathcal{V} = 36\sqrt{3} \text{ cm}^3$. 11. $\mathcal{A}_1 = 80 \text{ cm}^2$, $\mathcal{A}_2 = 144 \text{ cm}^2$, $\mathcal{V} = 64 \text{ cm}^3$. 12. $\mathcal{A}_1 = (24\sqrt{3} + 48) \text{ cm}^2$, $\mathcal{V} = 16\sqrt{3} \text{ cm}^3$. 13. a) $\mathcal{P} = 24 \text{ m}$, $\mathcal{A}_1 = 144 \text{ m}^2$, $\mathcal{A} = 180 \text{ m}^2$; b) $\mathcal{P} = 52 \text{ m}$, $\mathcal{A}_1 = 520 \text{ m}^2$, $l = 20 \text{ m}$; c) $\mathcal{P} = 36 \text{ m}$, $a = 9 \text{ m}$, $\mathcal{A} = 369 \text{ m}^2$; d) $a = 11 \text{ m}$, $l = 18 \text{ m}$, $\mathcal{A} = 517 \text{ m}^2$; e) $a = 8 \text{ m}$, $\mathcal{P} = 32 \text{ m}$, $l = 22 \text{ m}$. 14. $\mathcal{A}_1 = 60\sqrt{2} \text{ cm}^2$.
16. 6 cm. 17. $(48\sqrt{3} + 96) \text{ cm}^2$. 18. $\frac{432\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$. 19. $\sqrt{5}$. 20. $\mathcal{A}_1 = 150\sqrt{7} \text{ cm}^2$, $\mathcal{V} = \frac{1000}{3} \text{ cm}^3$.
21. $\mathcal{A}_1 = 384 \text{ cm}^2$, $\mathcal{V} = 384 \text{ cm}^3$. 22. a) $\mathcal{A}_1 = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $\mathcal{V} = \frac{16\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$; b) $\frac{1}{9}$. 23. $64\sqrt{3} \text{ cm}^2$.
§4. 6. 24 cm. 7. 5 cm. 8. 7 cm. 9. 20 cm. 10. $\frac{\sqrt{2279}}{2} \text{ cm}$. 11. 4 cm. 12. 16 cm^2 . 13. 25 cm.
14. 4 cm. 15. Nu, deoarece prelungirile muchiilor laterale nu sînt concurente în același punct.
16. $3\sqrt{3} \text{ cm}$.

Exerciții și probleme recapitulative

1. a) 720° ; b) 1080° ; c) 1440° . 2. $10\sqrt{\frac{2}{3}}$ cm. 3. $\frac{128\sqrt{2}}{3}$ cm³. 4. $\mathcal{A}_i = 232$ cm², $\mathcal{V} = 224$ cm³.
 5. $\mathcal{A}_i = 216$ cm². 6. $\mathcal{A}_i = 96$ cm², $\mathcal{V} = 32\sqrt{3}$ cm³. 7. $\mathcal{A}_i = 24$ cm², $\mathcal{V} = 12\sqrt{3}$ cm³.
 8. a) $\mathcal{A}_i = 594$ cm², $\mathcal{V} = 810$ cm³; b) $56,25$ cm². 9. $\mathcal{A}_i = 16\sqrt{3}$ cm², $\mathcal{V} = 8\sqrt{3}$ cm³.
 10. a) $4\sqrt{3}$ cm; b) 192 cm³. 11. $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ cm. 12. $h = 3,75$ cm, $\mathcal{V} = 281,25$ cm³. 13. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm³.
 14. 1224 cm³. 15. 252 cm². 16. $AB = 4\sqrt{2}$ cm, $\mathcal{V} = 128\sqrt{2}$ cm³. 17. 148 cm².
 18. $d = 3\sqrt{11}$ cm, $\mathcal{A}_i = 190$ cm². 19. $\mathcal{A}_i = (18\sqrt{3} + 288)$ cm², patru diagonale de $2\sqrt{43}$ cm și două de $4\sqrt{13}$ cm. 20. $\mathcal{A}_i = 940$ cm², $\mathcal{V} = 4200$ cm³. 21. $\mathcal{A}_i = 16\sqrt{3}$ cm², $\mathcal{V} = \frac{8\sqrt{5}}{3}$ cm³.
 22. a) 18 cm; b) $\sqrt{10}$ cm; c) $\frac{108\sqrt{30}}{3}$ cm³. 23. $\frac{8\sqrt{11}}{3}$ cm. 24. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ cm³.

Capitolul 5

- § 1. 3. a), c) Da; b) nu. 5. a) $\mathcal{A} = 150\pi$ cm², $\mathcal{V} = 250\pi$ cm³; b) $\mathcal{A} = 6\pi$ cm², $\mathcal{V} = 2\pi$ cm³; c) $\mathcal{A} = 0,96\pi$ cm², $\mathcal{V} = 0,128\pi$ cm³. 6. $\mathcal{A} = 130\pi$ cm², $\mathcal{V} = 200\pi$ cm³. 7. 96π cm³ sau 72π cm³.
 8. a) $\mathcal{A} = \left(192\sqrt{3} + \frac{288}{\pi}\right)$ cm², $\mathcal{V} = \frac{1152\sqrt{3}}{\pi}$ cm³ sau $\mathcal{A} = \left(192\sqrt{3} + \frac{96}{\pi}\right)$ cm², $\mathcal{V} = \frac{1152}{\pi}$ cm³;
 b) $\mathcal{A} = \left(100 + \frac{50}{\pi}\right)$ cm², $\mathcal{V} = \frac{250}{\pi}$ cm³; c) $\mathcal{A} = \left(\frac{128}{\pi} + \frac{256}{\sqrt{3}}\right)$ cm², $\mathcal{V} = \frac{1024}{\pi\sqrt{3}}$ cm³ sau
 $\mathcal{A} = \left(\frac{128}{3\pi} + \frac{256}{\sqrt{3}}\right)$ cm², $\mathcal{V} = \frac{1024}{3\pi}$ cm³. 9. 40π cm². 10. a) 60 cm²; b) 8 cm²; c) $2x^2\sqrt{3}$.
 11. a) 192π cm²; b) $36\sqrt{2}\pi$ cm². 12. a) 375 kg; b) $60,8$ kg. 13. 66π cm². 14. A doua.
 15. $\mathcal{A} = 125\pi$ cm², $\mathcal{V} = 187,5\pi$ cm³. 16. $\mathcal{A} = 130\pi$ cm², $\mathcal{V} = 200\pi$ cm³. 17. 4 cm.
 19. 1350 cm³. 20. $12\sqrt{2}$ cm, $\approx 48\%$. 21. 22 de piulițe, 17% din volumul bazei se pierde.
 22. De 8 ori. 23. De $2\sqrt{2}$ ori.

- § 2. 5. $\mathcal{A}_i = 24\pi$ cm², $\mathcal{V} = 36\pi$ cm³. 6. $\mathcal{A} = 312\pi$ cm², $\mathcal{V} = 1440\pi$ cm³. 7. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ cm.
 8. $2\sqrt{105}$ cm². 9. $\mathcal{A} = \frac{9\sqrt{7}}{4}\pi(4 + \sqrt{7})$ cm², $\mathcal{V} = \frac{567\sqrt{2}}{4}\pi$ cm³. 10. $\mathcal{A}_i = \pi\sqrt{R^4 + 4S^2}$, $\mathcal{V} = 2\pi RS$.
 11. 25 ml. 12. $\mathcal{A}_i = \frac{h^2}{d^2}\sqrt{d^2\pi S + S^2}$, $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\frac{Sh^3}{d^2}$. 13. $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi a^2 b^2 \sqrt{a^2 + b^2}$ cm³. 14. 24π cm².
 15. 125π cm³. 16. 256π cm³. 17. 384π cm³. 18. 1056π cm³.

- § 3. 6. $R = 50$ cm, $r = 6$ cm, $h = 117$ cm. 7. 10 cm. 8. 40 cm. 9. 12 cm. 10. $6,5$ cm. 11. $8,5$ cm.
 12. 13 cm. 13. $10,5\pi$ dm³. 14. 2 cm și 4 cm.

- § 4. 5. a) 8 cm; b) 24 cm; c) 4 cm. 6. 6400π km. 7. a) $\mathcal{A} = 144\pi$ cm², $\mathcal{V} = 288\pi$ cm³;

- b) $\mathcal{A} = 6\frac{30}{49}\pi \text{ cm}^2$, $\mathcal{V} = 1\frac{286}{343}\pi \text{ cm}^3$; c) $\mathcal{A} = 108\pi \text{ cm}^2$, $\mathcal{V} = 108\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$. 8. a) $81\pi \text{ cm}^2$; b) $180\pi \text{ cm}^2$; c) 0. 9. Unui băiat. 10. a) $3364\pi \text{ cm}^2$; b) $5476\pi \text{ cm}^2$. 11. a) 43 cm^2 .
12. a) $\frac{3}{2\sqrt{\pi}} \text{ cm}$.

Exerciții și probleme recapitulative

3. $\mathcal{A}_t = \left(20\sqrt{15} + \frac{150}{\pi}\right) \text{ cm}^2$, $\mathcal{V} = \frac{150\sqrt{5}}{\pi} \text{ cm}^3$. 4. $\mathcal{A}_t = 15,75\pi \text{ cm}^2$, $\mathcal{V} = \frac{9\sqrt{35}}{8}\pi \text{ cm}^3$. 5. 6 cm.
6. $\mathcal{A}_t = 33\pi \text{ cm}^2$, $\mathcal{V} = 36\pi \text{ cm}^3$. 7. a) $\frac{200\sqrt{3}}{27}\pi \text{ cm}^3$; b) $\frac{100}{3\sqrt{13}}\pi \text{ cm}^3$. 8. $\frac{54}{\pi} \text{ cm}^3$. 9. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.
10. Cazul I. $\mathcal{A}_t = 70\pi \text{ cm}^2$, $\mathcal{V} = 175\pi \text{ cm}^3$. Cazul II. $\mathcal{A}_t = 70\pi \text{ cm}^2$, $\mathcal{V} = 245\pi \text{ cm}^3$. 11. Masa bilei este mai mare. 12. $\frac{64\pi\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$. 13. 2 cm. 14. 7 cm. 15. Nu. 16. $\frac{81\pi}{2} \text{ cm}^3$. 17. Sfera.
18. $\mathcal{A}_t = 108\pi \text{ cm}^2$, $\mathcal{V} = \frac{216\sqrt{3}}{3}\pi \text{ cm}^3$. 19. $\mathcal{A}_t = \left(169 + \frac{338\sqrt{3}}{3}\right)\pi \text{ cm}^2$, $\mathcal{V} = \frac{2197\sqrt{3}}{9}\pi \text{ cm}^3$.
20. 90° . 21. 60° . 22. $\frac{3}{4}a^3\pi$. 23. 13 cm. 24. a) $256\pi \text{ cm}^3$; b) $256\pi \text{ cm}^3$.

Cuprins

Algebră

Capitolul 1. Recapitulare și completări	
§ 1. Mulțimea numerelor reale	4
§ 2. Operații cu numere reale	10
§ 3. Puteri și radicali	14
<i>Exerciții și probleme recapitulative</i>	19
<i>Test sumativ</i>	21
Capitolul 2. Funcții	
§ 1. Noțiunea de funcție. Recapitulare și completări	22
§ 2. Funcții numerice. Recapitulare și completări	25
§ 3. Funcția de gradul II	31
§ 4. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$	49
<i>Exerciții și probleme recapitulative</i>	51
<i>Test sumativ</i>	54
Capitolul 3. Polinoame și fracții algebrice	
§ 1. Monoame. Operații cu monoame	55
§ 2. Polinoame. Operații cu polinoame	59
§ 3. Împărțirea polinoamelor	67
§ 4. Rădăcinile polinoamelor	72
§ 5. Operații cu fracții algebrice. Recapitulare și completări	74
<i>Exerciții și probleme recapitulative</i>	79
<i>Test sumativ</i>	80
Capitolul 4. Ecuații. Sisteme de ecuații	
§ 1. Ecuații de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Recapitulare și completări	81
§ 2. Ecuații de gradul II cu o necunoscută	85
§ 3. Ecuații raționale	92
§ 4. Sisteme de ecuații	95
§ 5. Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor și/sau sistemelor de ecuații	99
<i>Exerciții și probleme recapitulative</i>	103
<i>Test sumativ</i>	106
Capitolul 5. Inecuații. Sisteme de inecuații	
§ 1. Inecuații și sisteme de inecuații de gradul I cu o necunoscută. Recapitulare și completări	107
§ 2. Inecuații de gradul II cu o necunoscută. Metoda intervalelor	114
<i>Exerciții și probleme recapitulative</i> ...	121
<i>Test sumativ</i>	122

Geometrie

Capitolul 1. Recapitulare și completări	
§ 1. Puncte, linii, plane, unghiuri	124
§ 2. Poligoane	130
<i>Test sumativ</i>	140
Capitolul 2. Cercul	
§ 1. Recapitulare și completări	141
§ 2. Unghiuri înscrise în cerc	148
§ 3. Cercuri înscrise. Cercuri circumscrise	154
<i>Exerciții și probleme recapitulative</i> ...	160
<i>Test sumativ</i>	162
Capitolul 3. Arii	
§ 1. Noțiunea de arie	163
§ 2. Aria paralelogramelor	163
§ 3. Aria triunghiului	166
§ 4. Aria trapezului	167
§ 5. Aria poligonului regulat. Lungimea cercului și aria discului	168
<i>Exerciții și probleme</i>	169
<i>Test sumativ</i>	173
Capitolul 4. Poliedre	
§ 1. Poliedre	174
§ 2. Prisma	177
§ 3. Piramida	185
§ 4. Trunchiul de piramidă	191
<i>Exerciții și probleme recapitulative</i> ...	195
<i>Test sumativ</i>	197
Capitolul 5. Corpuri rotunde	
§ 1. Cilindrul (circular drept)	198
§ 2. Conul (circular drept)	204
§ 3. Trunchiul de con (circular drept)	208
§ 4. Sfera	212
<i>Exerciții și probleme recapitulative</i> ...	215
<i>Test sumativ</i>	217
Răspunsuri și indicații	218